УДК 681.5.015:007

А. Б. Ракитянская, к. т. н., доц.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Рассматривается восстановление входов по наблюдаемым выходам на основе нечетких правил с отношениями ЕСЛИ – ТО. Суть предлагаемого подхода состоит в формулировании и решении соответствующих задач оптимизации, которые находят корни нечетких логических уравнений и настраивают нечеткую модель по доступным экспериментальным данным.

Ключевые слова: *обратная задача, нечеткие правила с отношениями ЕСЛИ – ТО, решение нечетких логических уравнений, настройка нечеткой модели, генетические алгоритмы.*

Введение

Широкий класс задач, возникающих в технике, медицине и других областях, относится к классу обратных задач [1]. Суть обратной задачи состоит в следующем. Известна зависимость ***Y=f(X)***, связывающая вектор ***X*** ненаблюдаемых параметров с вектором ***Y*** наблюдаемых параметров. Необходимо по известным значениям вектора ***Y*** установить неизвестные значения вектора ***X***. Типичным представителем обратной задачи является задача медицинской и технической диагностики, которая сводится к восстановлению неизвестных причин или диагнозов по наблюдаемым следствиям или симптомам. В тех случаях, когда для построения причинно-следственных связей используется опыт экспертов, зависимость между ненаблюдаемыми и наблюдаемыми параметрами можно моделировать средствами теории нечетких множеств: нечеткими отношениями и нечеткими правилами ЕСЛИ – ТО [2]. Наиболее развитыми являются аналитические [3, 4] и численные [5 – 7] методы решения обратных задач диагностики на основе нечетких отношений и композиционного правила вывода Заде. В этой статье предлагается подход к решению обратной задачи на основе описания зависимости ***Y=f(X)*** с помощью нечетких правил с отношениями ЕСЛИ – ТО. Такие правила позволяют просто и естественно учитывать сложные комбинации в причинно-следственных связях, которые сложно моделируются нечеткими отношениями между отдельными термами [6, 7]. Проблема состоит не только в решении системы нечетких логических уравнений, которые соответствуют правилам ЕСЛИ – ТО, но и в подборе таких форм функций принадлежности нечетких термов и таких весов нечетких правил ЕСЛИ – ТО, которые обеспечивают наибольшую близость между модельными и реальными выходами объекта.

Суть предлагаемого подхода состоит в формулировке и решении соответствующих задач оптимизации, которые, с одной стороны, находят корни нечетких логических уравнений, а с другой, – настраивают нечеткую модель на доступные экспериментальные данные. Для решения поставленных задач оптимизации предлагаются генетические алгоритмы.

1. Нечеткая модель объекта

Связь «входы $(x_1,...,x_n)$ – выходы $y_1,...,y_m)$» можно представить в виде экспертной матрицы знаний (табл. 1). Этой матрице соответствует нечеткая база знаний:

$$\text{ЕСЛИ } X = A_1 \text{ с весом } w_{11} \text{ ИЛИ} \ldots\ X = A_K \text{ с весом } w_{K1} \text{ ТО } Y = B_1;$$

$$\ldots$$

$$\text{ЕСЛИ } X = A_1 \text{ с весом } w_{1Q} \text{ ИЛИ} \ldots X = A_K \text{ с весом } w_{KQ} \text{ ТО } Y = B_Q, \tag{1}$$

где $A_l = \langle a_{1l},...,a_{nl} \rangle$ и $B_p = \langle b_{1p},...,b_{mp} \rangle$ – комбинации входных и выходных термов, $l = \overline{1,K}$,

$p=\overline{1,Q}$; a_{il} и b_{jp} – нечеткие термы, описывающие переменные x_i и y_j во входных и выходных комбинациях A_l и B_p; w_{lp} – вес правила, т. е. число в интервале [0, 1], отражающее степень влияния комбинации A_l на возникновение комбинации B_p; K и Q – число комбинаций входных и выходных термов.

Задача обратного логического вывода формулируется следующим образом: по наблюдаемым значениям выходных переменных $(y_1^*,...,y_m^*)$ требуется восстановить значения входных переменных $(x_1^*,...,x_n^*)$. Восстановление входов сводится к решению системы нечетких логических уравнений, которая следует из (1):

$$\max_{l=1,K}\left(\min\left[\mu^{A_l}(X),w_{l1}\right]\right)=\min_{j=1,m}\left[\mu^{b_{j1}}(y_j)\right]$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$\max_{l=1,K}\left(\min\left[\mu^{A_l}(X),w_{lQ}\right]\right)=\min_{j=1,m}\left[\mu^{b_{jQ}}(y_j)\right], \quad (2)$$

где

$$\min_{i=1,n}\left[\mu^{a_{i1}}(x_i)\right]=\mu^{A_1}$$
$$\ldots$$
$$\min_{i=1,n}\left[\mu^{a_{iK}}(x_i)\right]=\mu^{A_K}. \quad (3)$$

Таблица 1

Нечеткая база знаний

ТО выходы					B_1	…	B_Q
				y_1	b_{11}	…	b_{1Q}
				…	…	…	…
ЕСЛИ входы				y_m	b_{m1}	…	b_{mQ}
	x_1	…	x_n	Вес			
A_1	a_{11}	…	a_{n1}		w_{11}	…	w_{1Q}
	…	…	…		…	…	…
A_K	a_{1K}	…	a_{nK}		w_{K1}	…	w_{KQ}

Здесь $\mu^{a_{il}}(x_i)$ и $\mu^{b_{jp}}(y_j)$ – функция принадлежности переменных x_i и y_j к нечетким термам a_{il} и b_{jp}; $\mu^{A_l}(X)$ – функция принадлежности вектора $\boldsymbol{X}$ к комбинации входных термов A_l, $l=\overline{1,K}$.

Использование нечетких логических уравнений предусматривает наличие функций принадлежности нечетких термов. Будем использовать следующую функцию принадлежности нечеткого терма T:

$$\mu^T(u)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{u-\beta}{\sigma}\right)^2}, \quad (4)$$

где β – координата максимума функции, $\mu^T(\beta)=1$; σ – параметр концентрации-растяжения.

Соотношения (2) – (4) определяют общий вид нечеткой модели объекта следующим образом:

$$F_Y(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W},\boldsymbol{B}_C,\boldsymbol{\Omega}_C)=\boldsymbol{\mu}^B(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B}_E,\boldsymbol{\Omega}_E), \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\mu}^B$ – вектор мер значимостей комбинаций выходных термов; $\boldsymbol{W}=(w_{11},...,w_{K1},...,w_{1Q},...,w_{KQ})$ – матрица весов; $\boldsymbol{B}_C=(\beta^{C_1},...,\beta^{C_N})$ и $\boldsymbol{\Omega}_C=(\sigma^{C_1},...,\sigma^{C_N})$ – векторы β- и σ-параметров функций принадлежности нечетких термов входных переменных C_1, …, C_N; $\boldsymbol{B}_E=(\beta^{E_1},...,\beta^{E_M})$ и $\boldsymbol{\Omega}_E=(\sigma^{E_1},...,\sigma^{E_M})$ – векторы β- и σ-параметров функций принадлежности нечетких термов выходных переменных E_1, … , E_M; N и M – общее число нечетких термов входных и выходных переменных; F_Y – оператор связи „входы – выходы”, соответствующий формулам (2) – (4).

2. Решение системы нечетких логических уравнений

Следуя подходу [5 – 7], задача решения системы нечетких логических уравнений (2) формулируется так. Найти вектор мер значимостей входных термов $\boldsymbol{\mu}^C=(\mu^{C_1},...,\mu^{C_N})$, удовлетворяющий ограничения $\mu^{C_I} \in [0,1]$, $I = \overline{1,N}$ и обеспечивающий наименьшее расстояние между модельными и наблюдаемыми мерами значимости комбинаций выходных термов:

$$F = \sum_{p=1}^{Q} \left[\max_{l=\overline{1,K}} \left(\min\left(\mu^{A_l}(\boldsymbol{X}), w_{lp} \right) \right) - \mu^{B_p}(\boldsymbol{Y}) \right]^2 = \min_{\boldsymbol{\mu}^C}. \tag{6}$$

Согласно [3, 4] множество решений $S(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^B)$ системы (2) определяется единственным максимальным решением $\overline{\boldsymbol{\mu}}^A$ и множеством минимальных решений $S^*(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^B) = \left\{ \underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A,\ t = \overline{1,T} \right\}$:

$$S(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^B) = \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A \in S^*} \left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right]. \tag{7}$$

Здесь $\overline{\boldsymbol{\mu}}^A = (\overline{\mu}^{A_1}, ..., \overline{\mu}^{A_K})$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A = (\underline{\mu}_t^{A_1}, ..., \underline{\mu}_t^{A_K})$ – векторы верхних и нижних границ мер значимости входных комбинаций A_l, где операция объединения выполняется над всеми $\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A \in S^*(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^B)$.

Каждому интервальному решению $\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right]$, $t = \overline{1,T}$ системы (2) соответствует множество решений $D_t\left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right)$ системы (3), которое определяется единственным минимальным решением $\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^C$ и множеством максимальных решений $D_t^*\left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right) = \left\{ \overline{\boldsymbol{\mu}}_{th}^C, h = \overline{1, H_t} \right\}$:

$$D_t\left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right) = \bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}_{th}^C \in D_t^*} \left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_{th}^C \right]. \tag{8}$$

Здесь $\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^C = (\underline{\mu}_t^{C_1}, ..., \underline{\mu}_t^{C_N})$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_{th}^C = (\overline{\mu}_{th}^{C_1}, ..., \overline{\mu}_{th}^{C_N})$ – векторы верхних и нижних границ степеней принадлежности входов к термам C_I, где операция объединения выполняется над всеми $\overline{\boldsymbol{\mu}}_{th}^C \in D_t^*\left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right)$.

На основе соотношений (7) и (8) множество решений системы (2) определяется так:

$$\widetilde{D}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^A, \boldsymbol{\mu}^B) = \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A \in S^*(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^B)} D_t\left(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A \right). \tag{9}$$

Формирование множества решений (9) начинается с поиска нулевого решения $\boldsymbol{\mu}_0^C = (\mu_0^{C_1}, ..., \mu_0^{C_N})$ задачи оптимизации (6) с помощью генетического алгоритма [5 – 7]. Нулевому решению $\boldsymbol{\mu}_0^C$ соответствует модифицированный нечеткий вектор $\boldsymbol{\mu}_0^B = (\mu_0^{B_1}, ..., \mu_0^{B_Q})$, который обеспечивает аналитическую разрешимость систем нечетких логических уравнений (2) и (3). Формирование множества решений $S(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}_0^B)$ для модифицированного вектора $\boldsymbol{\mu}_0^B$ осуществляется с помощью точных аналитических методов, реализованных в программных приложениях MATLAB [4].

3. Настройка нечеткой модели

Пусть обучающая выборка задана в виде L пар экспериментальных данных: $\left\langle \hat{\boldsymbol{X}}_k, \hat{\boldsymbol{Y}}_k \right\rangle$, $k = \overline{1,L}$, где $\hat{\boldsymbol{X}}_k = \left(\hat{x}_1^k, ..., \hat{x}_n^k \right)$ и $\hat{\boldsymbol{Y}}_k = \left(\hat{y}_1^k, ..., \hat{y}_m^k \right)$ – векторы значений входных и выходных переменных в эксперименте с номером *k*. Суть настройки состоит в подборе таких нулевых решений $\boldsymbol{\mu}_0^C(\hat{x}_1^k,...,\hat{x}_n^k)$ обратной задачи, которые минимизируют критерий (6) для всех точек обучающей выборки.

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{L}}\left[F_Y(\boldsymbol{\mu}_0^C(\hat{x}_1^k,...,\hat{x}_n^k))-\hat{\boldsymbol{\mu}}^B(\hat{y}_1^k,...,\hat{y}_m^k)\right]^2=\min.$$

Другими словами, необходимо найти такой вектор весов $\boldsymbol{W}$ и такие векторы параметров функций принадлежности $\boldsymbol{B}_C$, $\boldsymbol{\Omega}_C$, $\boldsymbol{B}_E$, $\boldsymbol{\Omega}_E$, которые обеспечивают минимальное расстояние между модельными и экспериментальными векторами мер значимостей комбинаций выходных термов:

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{L}}\left[F_Y(\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{k}},\boldsymbol{W},\boldsymbol{B}_{\mathrm{C}},\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}})-\hat{\boldsymbol{\mu}}^B(\hat{\boldsymbol{Y}}_k,\boldsymbol{B}_{\mathrm{E}},\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{E}})\right]^2=\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{B}_C,\boldsymbol{\Omega}_C,\boldsymbol{B}_E,\boldsymbol{\Omega}_E}. \qquad (10)$$

В генетическом алгоритме решения задачи оптимизации (10) хромосома определяется как вектор кодов параметров $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{B}_C$, $\boldsymbol{\Omega}_C$, $\boldsymbol{B}_E$, $\boldsymbol{\Omega}_E$, а функция соответствия строится на основе критерия (10).

4. Компьютерный эксперимент

Цель эксперимента состояла в восстановлении эталонной модели “два входа (x_1,x_2) – два выхода (y_1,y_2)”, представленной на рис. 1:

$$y_1=f_1(x_1,x_2)=\left((2z_1-0{,}9)\,(7z_1-1)\,(17z_2-19)\,(15z_2-2)\right)/10,\ y_2=f_2(x_1,x_2)=-y_1+3.4,$$

где $z_1=\left((x_1-2{,}9)^2+(x_2-2{,}9)^2\right)/39$, $z_2=(x_1-3{,}1)^2+(x_2-3{,}1)^2/41$.

Этой модели соответствуют нечеткие правила ЕСЛИ – ТО из табл. 2, где входы и выходы описывались нечеткими термами: *Низкий* C_1 *(L)*, *Средний* C_2 *(A)*, *Высокий* C_3 *(H)* для x_1; C_4 *(L)*, C_5 *(A)*, C_6 *(H)* для x_2; E_1*=выше Низкого* (*hL*), E_2*= ниже Среднего (lA),* E_3*=Высокий (H)* для y_1; E_4*=Низкий (L)*, E_5*=выше Среднего (hA)*, E_6*=ниже Высокого (lH)* для y_2.

Матрица весов формировалась на основе метода парных сравнений [6, 7]. Результаты настройки нечеткой модели представлены в табл. 3.

Результаты решения задачи обратного вывода после настройки приведены на рис. 2. Там же показаны функции принадлежности нечетких термов входных и выходных переменных после настройки.

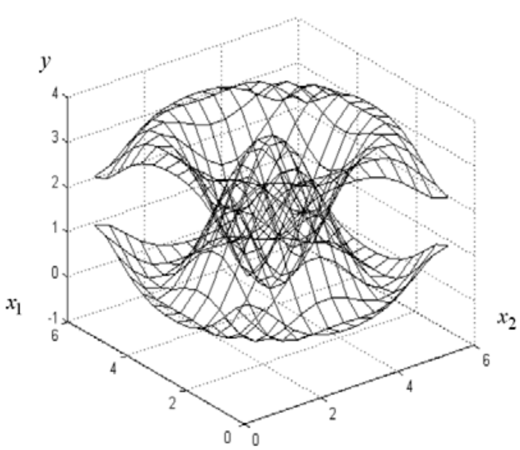

Рис. 1. Модель-генератор «Входы – выходы»

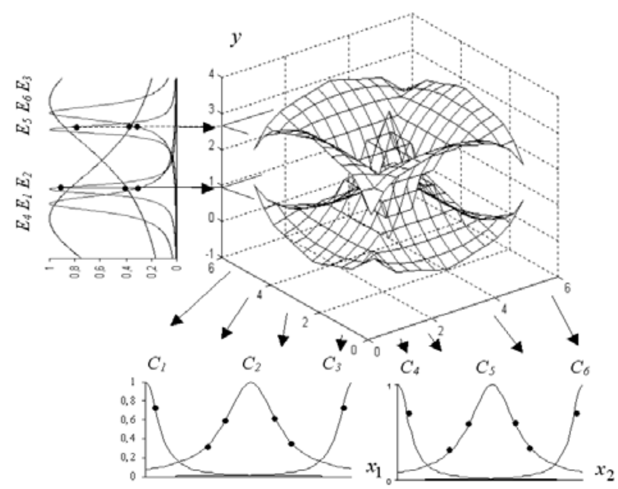

Рис. 2. Решение задачи обратного вывода после настройки

Таблица 3

Параметры функций принадлежности нечетких термов после настройки

Параметр	Нечеткие термы входных переменных						Параметр	Нечеткие термы выходных переменных					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
β -	0.03	3.04	5.97	0.02	3.05	5.96	β -	0.52	0.91	3.35	0.10	2.57	3.03
σ -	0.41	0.82	0.39	0.43	0.9	0.4	σ -	0.28	0.16	1.95	1.93	0.14	0.26

Нечеткие логические уравнения после настройки имеют вид:

$$(\mu^{A_1} \wedge 0.60) \vee (\mu^{A_2} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_3} \wedge 0.60) \vee (\mu^{A_4} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_5} \wedge 0.06) \vee$$
$$\vee (\mu^{A_6} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_7} \wedge 0.60) \vee (\mu^{A_8} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_9} \wedge 0.60) = \mu^{E_1} \wedge \mu^{E_6}$$
$$(\mu^{A_1} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_2} \wedge 0.52) \vee (\mu^{A_3} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_4} \wedge 0.52) \vee (\mu^{A_5} \wedge 0.19) \vee$$
$$\vee (\mu^{A_6} \wedge 0.52) \vee (\mu^{A_7} \wedge 1.00) \vee (\mu^{A_8} \wedge 0.52) \vee (\mu^{A_9} \wedge 1.00) = \mu^{E_2} \wedge \mu^{E_5}$$
$$(\mu^{A_1} \wedge 0.34) \vee (\mu^{A_2} \wedge 0.06) \vee (\mu^{A_3} \wedge 0.34) \vee (\mu^{A_4} \wedge 0.06) \vee (\mu^{A_5} \wedge 1.00) \vee$$
$$\vee (\mu^{A_6} \wedge 0.06) \vee (\mu^{A_7} \wedge 0.34) \vee (\mu^{A_8} \wedge 0.06) \vee (\mu^{A_9} \wedge 0.34) = \mu^{E_3} \wedge \mu^{E_4}, \quad (11)$$

где

$$\mu^{C_1} \wedge \mu^{C_4} = \mu^{A_1}$$
$$\mu^{C_2} \wedge \mu^{C_4} = \mu^{A_2}$$
$$\mu^{C_3} \wedge \mu^{C_4} = \mu^{A_3}$$
$$\mu^{C_1} \wedge \mu^{C_5} = \mu^{A_4}$$
$$\mu^{C_2} \wedge \mu^{C_5} = \mu^{A_5}$$
$$\mu^{C_3} \wedge \mu^{C_5} = \mu^{A_6}$$
$$\mu^{C_1} \wedge \mu^{C_6} = \mu^{A_7}$$
$$\mu^{C_2} \wedge \mu^{C_6} = \mu^{A_8}$$
$$\mu^{C_3} \wedge \mu^{C_6} = \mu^{A_9}. \quad (12)$$

Таблица 2

Нечеткая матрица знаний для модели-эталона

ЯКЩО входы / ТО выходы				B_1	B_2	B_3
			y_1	lA	hL	H
			y_2	hA	lH	L
	x_1	x_2	**Вага**			
A_1, A_3, A_7, A_9	***L (H)***	***L(H)***		0.67	1.00	0.44
A_2, A_4	*A (L)*	*L(A)*		1.00	0.50	0.11
A_6, A_8	*H (A)*	*A(H)*				
A_5	*A*	*A*		0.11	0.17	1.00

Пусть конкретные значения выходов составляют y_1^*=0.95 и y_2^*=2.65. Для этих значений с помощью функций принадлежности на рис. 2 были определены меры значимости выходных термов: $\mu^{E_1}(y_1^*)$=0.30; $\mu^{E_2}(y_1^*)$=0.94; $\mu^{E_3}(y_1^*)$=0.40; $\mu^{E_4}(y_2^*)$=0.36; $\mu^{E_5}(y_2^*)$=0.75; $\mu^{E_6}(y_2^*)$=0.32.

Вектор мер значимостей комбинаций выходных термов составил:

$$\boldsymbol{\mu}^B(Y^*) = (\mu^{B_1} = 0.30;\ \mu^{B_2} = 0.75;\ \mu^{B_3} = 0.36).$$

С помощью генетического алгоритма было получено нулевое решение

$$\boldsymbol{\mu}_0^C = (\mu_0^{C_1} = 0.91, \mu_0^{C_2} = 0.43, \mu_0^{C_3} = 0.80, \mu_0^{C_4} = 0.75, \mu_0^{C_5} = 0.36, \mu_0^{C_6} = 0.75),$$

которому соответствует модифицированный нечеткий вектор

$$\boldsymbol{\mu}_0^B = (\mu_0^{B_1} = 0.60, \mu_0^{B_2} = 0.75, \mu_0^{B_3} = 0.36),$$

т. е. значение критерия оптимизации (9) составило F=0.0900.

С помощью MATLAB-приложения ***solve_flse.m*** [4] для модифицированного вектора $\boldsymbol{\mu}_0^B$ было сформировано множество решений $S(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}_0^B)$ системы (11), которое определяется единственным максимальным решением $\bar{\boldsymbol{\mu}}^A$ и четырьмя минимальными решениями $S^* = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, t = \overline{1, 4}\}$:

$$S(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}_0^B) = \bigcup_{t=1,\ldots,4} [\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A] = \{\mu^{A_2} = \mu^{A_4} = \mu^{A_6} = \mu^{A_8} \in [0, 0.6],\ \mu^{A_5} = 0.36\} \cap$$
$$\{\{\mu^{A_1} = 0.75,\ \mu^{A_3} = \mu^{A_7} = \mu^{A_9} \in [0, 0.75]\} \cup \{\mu^{A_3} = 0.75,\ \mu^{A_1} = \mu^{A_7} = \mu^{A_9} \in [0, 0.75]\} \cup$$
$$\{\mu^{A_7} = 0.75,\ \mu^{A_1} = \mu^{A_3} = \mu^{A_9} \in [0, 0.75]\} \cup \{\mu^{A_9} = 0.75,\ \mu^{A_1} = \mu^{A_3} = \mu^{A_7} \in [0, 0.75]\}\}. \quad (13)$$

Для интервалов (13) с помощью MATLAB-приложения ***solve_flse.m*** [4] были сформированы множества решений $D_t(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A)$, $t = \overline{1, 4}$ системы (12).

Множество решений $D_1(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A)$ определяется единственным минимальным решением $\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C$ и четырьмя максимальными решениями $D_1^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_{1h}^C, h = \overline{1, 4}\}$

$$D_1(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A) = \bigcup_{h=1,\ldots,4} [\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{1h}^C] = \{\mu^{C_3} \in [0, 0.75],\ \mu^{C_6} \in [0, 0.75]\} \cap$$
$$\{\{\{\mu^{C_1} = 0.75,\ \mu^{C_4} \in [0.75, 1.0]\} \cup \{\mu^{C_1} \in [0.75, 1.0],\ \mu^{C_4} = 0.75\}\} \cap$$
$$\{\{\mu^{C_2} = 0.36,\ \mu^{C_5} \in [0.36, 0.6]\} \cup \{\mu^{C_2} \in [0.36, 0.6],\ \mu^{C_5} = 0.36\}\}\}.$$

Множество решений $D_2(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A)$ определяется единственным минимальным решением $\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C$ и четырьмя максимальными решениями $D_2^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_{2h}^C, h = \overline{1, 4}\}$

$$D_2(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A) = \bigcup_{h=1,\ldots,4} [\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{2h}^C] = \{\mu^{C_1} \in [0, 0.75],\ \mu^{C_6} \in [0, 0.75]\} \cap$$
$$\{\{\{\mu^{C_3} = 0.75,\ \mu^{C_4} \in [0.75, 1.0]\} \cup \{\mu^{C_3} \in [0.75, 1.0],\ \mu^{C_4} = 0.75\}\} \cap$$
$$\{\{\mu^{C_2} = 0.36,\ \mu^{C_5} \in [0.36, 0.6]\} \cup \{\mu^{C_2} \in [0.36, 0.6],\ \mu^{C_5} = 0.36\}\}\}.$$

Множество решений $D_3(\underline{\boldsymbol{\mu}}_3^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A)$ определяется единственным минимальным решением $\underline{\boldsymbol{\mu}}_3^C$ и четырьмя максимальными решениями $D_3^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_{3h}^C, h = \overline{1, 4}\}$

$$D_3(\underline{\boldsymbol{\mu}}_3^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A) = \bigcup_{h=1,\ldots,4} [\underline{\boldsymbol{\mu}}_3^C, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{3h}^C] = \{\mu^{C_3} \in [0, 0.75],\ \mu^{C_4} \in [0, 0.75]\} \cap$$
$$\{\{\{\mu^{C_1} = 0.75,\ \mu^{C_6} \in [0.75, 1.0]\} \cup \{\mu^{C_1} \in [0.75, 1.0],\ \mu^{C_6} = 0.75\}\} \cap$$
$$\{\{\mu^{C_2} = 0.36,\ \mu^{C_5} \in [0.36, 0.6]\} \cup \{\mu^{C_2} \in [0.36, 0.6],\ \mu^{C_5} = 0.36\}\}\}.$$

Множество решений $D_4(\underline{\boldsymbol{\mu}}_4^A, \bar{\boldsymbol{\mu}}^A)$ определяется единственным минимальным решением $\underline{\boldsymbol{\mu}}_4^C$ и четырьмя максимальными решениями $D_4^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_{4h}^C, h = \overline{1, 4}\}$

$$D_4(\underline{\boldsymbol{\mu}}_4^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A) = \bigcup_{h=1,\ldots,4} [\underline{\boldsymbol{\mu}}_4^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_{4h}^C] = \{\mu^{C_1} \in [0,\, 0.75],\ \mu^{C_4} \in [0,\, 0.75]\} \cap$$

$$\{\{\{\mu^{C_3} = 0.75,\ \mu^{C_6} \in [0.75,\, 1.0]\} \cup \{\mu^{C_3} \in [0.75,\, 1.0],\ \mu^{C_6} = 0.75\}\} \cap$$

$$\{\{\mu^{C_2} = 0.36,\ \mu^{C_5} \in [0.36,\, 0.6]\} \cup \{\mu^{C_2} \in [0.36,\, 0.6],\ \mu^{C_5} = 0.36\}\}\}.$$

Таким образом, решение системы нечетких логических уравнений (11) имеет вид:

$$\widetilde{D}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}^A, \boldsymbol{\mu}^B) = \bigcup_{t=1,\ldots,4} D_t(\underline{\boldsymbol{\mu}}_t^A, \overline{\boldsymbol{\mu}}^A). \qquad (14)$$

Для каждого интервала в решении (14) с помощью функций принадлежности на рис. 2 могут быть определены интервалы значений входных переменных:

$x_1^* \in [0,\, 0.27]$ или $x_1^* \in [0.27,\, 6.0]$ для C_1; $x_1^* \in [1.95,\, 2.37]$ или $x_1^* \in [3.71,\, 4.13]$ для C_2;

$x_1^* \in [0,\, 5.74]$ или $x_1^* \in [5.74,\, 6.0]$ для C_3; $x_2^* \in [0,\, 0.27]$ или $x_2^* \in [0.27,\, 6.0]$ для C_4;

$x_2^* \in [1.85,\, 2.32]$ или $x_2^* \in [3.78,\, 4.25]$ для C_5; $x_2^* \in [0,\, 5.73]$ или $x_2^* \in [5.73,\, 6.0]$ для C_6.

Восстановление множества входов для y_1^*=0.95 и y_2^*=2.65 показано на рис. 2. Маркерами отмечены значения степеней принадлежности входов и выходов к нечетким термам $C_1 \div C_6$ и $E_1 \div E_6$. Сравнение эталонных и восстановленных линий уровня для y_1^*=0.95 и y_2^*=2.65 показано на рис. 3. Повышение точности аппроксимации возможно за счет увеличения количества нечетких термов, что, в свою очередь, позволит увеличить число сторон многоугольника, аппроксимирующих круг.

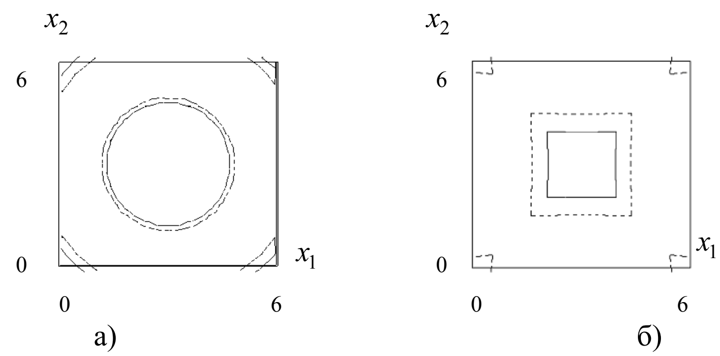

Рис. 3. Сравнение эталонных (а) и восстановленных (б) линий уровня для y_1^*=0.95 (____) и y_2^*=2.65 (_ _ _)

Выводы

В этой статье предложен подход к решению обратной задачи на основе описания взаимосвязи между ненаблюдаемыми и наблюдаемыми параметрами объекта с помощью нечетких правил с отношениями ЕСЛИ – ТО. Восстановление входов по наблюдаемым выходам осуществляется путем решения системы нечетких логических уравнений, которые соответствуют правилам ЕСЛИ – ТО, и настройки нечеткой модели по доступным экспериментальным данным. Для решения задач оптимизации предложены генетические алгоритмы. Эффективность предложенных моделей и алгоритмов подтверждена компьютерным экспериментом. Рассмотренный подход может найти применение в технике, медицине, экономике и других отраслях, где возникает необходимость интерпретации экспериментальных наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.

3. Di Nola A., Sessa S., Pedrycz W., Sanchez E. Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1989. – 278 p.

4. Peeva K., Kyosev Y. Fuzzy Relational Calculus Theory, Applications and Software. – World Scientific Publishing Company, 2004. – 292 p. CD-ROM http://mathworks.net

5. Ротштейн А.П., Ракитянская А.Б. Решение задач диагностики на основе нечётких отношений и генетического алгоритма // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 6. – С. 162 – 170.

6. Ротштейн А.П., Ракитянская А.Б. Диагностика на основе нечетких отношений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 12. – С. 113 – 130.

7. A. Rotshtein, H. Rakytyanska. Diagnosis Problem Solving using Fuzzy Relations // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 16 (3). – P. 664 – 675.

Ракитянская Анна Борисовна – к. т. н., доцент, доцент кафедры программного обеспечения, e-mail: h_rakit@ukr.net

Винницкий национальный технический университет