

Б. И. Мокин, д. т. н., проф.; А. Б. Мокин, к. т. н., доц.

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Предложен метод идентификации нелинейных динамических объектов с экстремальными характеристиками, для реализации алгоритма которого на объект нужно подавать сначала ступенчатое, а затем синусоидальное входное воздействие и регистрировать реакции объекта на эти воздействия. Расчетные соотношения предложенного метода получены согласно идеологии Фурье-интегрального метода идентификации и предусматривают разложение входного воздействия и реакции объекта на него в отрезки рядов Фурье.

Ключевые слова: ФИМИ, Фурье-интегральный метод, идентификация, нелинейные динамические объекты, экстремальная статическая характеристика.

Исходные условия и постановка задачи

Достаточно широкому классу динамических объектов в химической технологии и теплоэнергетике с входным воздействием $x(t)$ и реакцией на него $y(t)$, динамика которых характеризуется импульсной переходной характеристикой $g(t)$, свойственна статическая характеристика $y = f(x)$, имеющая экстремальный характер (рис. 1).

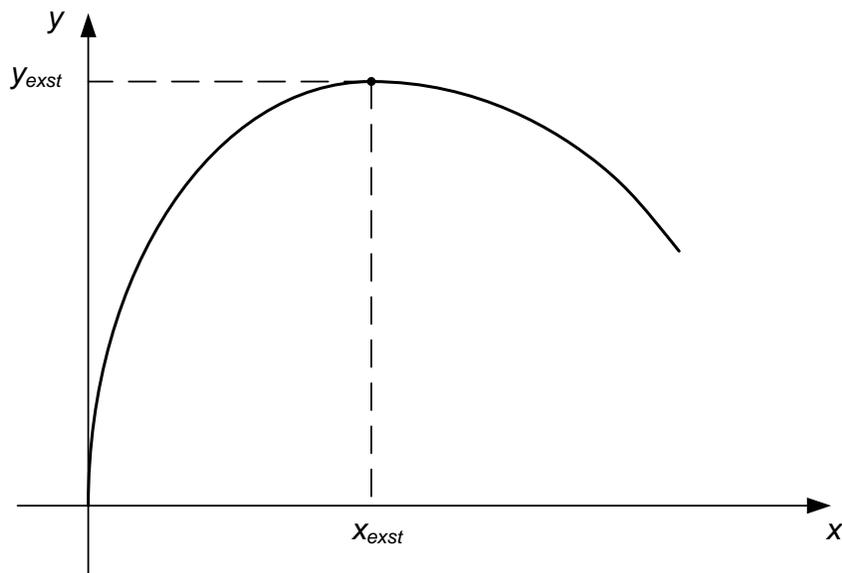


Рис. 1. Экстремальная статическая характеристика динамического объекта

Поэтому, чтобы полностью идентифицировать такой объект, необходимо определить обе эти характеристики: и $g(t)$, и $y = f(x)$.

Именно такая задача и ставится в данной работе.

Для решения этой задачи выдвинем две исходные предпосылки, согласно первой из которых предлагается идентифицировать статическую характеристику $y = f(x)$ объекта степенным полиномом третьего порядка, то есть

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3. \quad (1)$$

Конечно, для аппроксимации экстремальной статической характеристики, приведенной на рисунке 1, можно использовать и степенной полином второго порядка, поскольку у него точка экстремума будет иметь такие же координаты (x_{exst}, y_{exst}) , но мы используем степенной полином третьего порядка, потому что он точнее передает характер нарастания координаты y при начальных значениях координаты x .

А в качестве второй входной предпосылки используем известный подход [1 – 3], основанный на том, что структура динамического объекта рассматривается в виде последовательного соединения его инерционной линейной части, имеющей импульсную переходную характеристику $g(t)$ и промежуточный выходной сигнал $x^*(t)$, и нелинейного безинерционного звена, имеющего характеристику $y = f(x^*)$ (рис. 2).

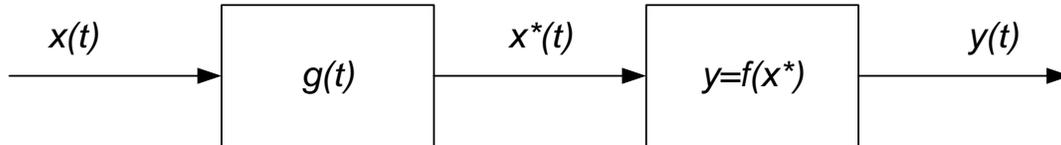


Рис. 2. Структура динамического объекта с выделением инерционной линейной части и безинерционной нелинейной части

Очевидно, что после введения второго исходного условия в уравнение (1) нужно вместо x рассматривать x^* .

Идентификация нелинейной статической характеристики

Как известно [1 – 3], исходный сигнал $x^*(t)$ линейной части динамического объекта можно найти с помощью интеграла свертки

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau, \tag{2}$$

который при условии физической реализуемости объекта

$$g(t) = \begin{cases} g(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

приобретает вид

$$x^*(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Согласно теории Фурье-интегрального метода идентификации динамических объектов [3] разложим входной сигнал $x(t)$ в отрезок ряда Фурье на выбранном промежутке времени T . Согласно [3, 4] будем иметь

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1 t}, \tag{5}$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad k = -n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Сразу же отметим, что при формировании какого-либо сигнала физической системы с ограниченным запасом энергии, он всегда может быть аппроксимирован с заданной точностью отрезком ряда Фурье.

Подставляя значение $x(t)$ из выражения (5) в выражение (4), получим

$$x^*(t) = \int_0^{\infty} \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad (7)$$

или

$$x^*(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1 t} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-jk\omega_1 \tau} d\tau. \quad (8)$$

Если вспомнить, что передаточная функция линейной части динамического объекта — это

$$W(p) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (9)$$

а ее амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) — это

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (10)$$

то уравнение (8) несложно привести к виду

$$x^*(t) = \sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}. \quad (11)$$

Подставляя значение $x^*(t)$ из выражения (11) в выражение (1) будем иметь

$$y(t) = c_1 \sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} + c_2 \left(\sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right)^2 + c_3 \left(\sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right)^3. \quad (12)$$

В случае, когда входной сигнал $x(t)$ представляет собой синусоиду с частотой ω_1 , то есть

$$x(t) = A \sin \omega_1 t = A \left(\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \right) = \frac{A}{2j} e^{j\omega_1 t} + \frac{A}{-2j} e^{-j\omega_1 t}, \quad (13)$$

уравнение (12) превратится в уравнение

$$y(t) = c_1 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}) + c_2 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t})^2 + c_3 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t})^3, \quad (14)$$

в котором

$$a_1 = \frac{A}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{A}{2j}. \quad (15)$$

Возводя в степень в уравнении (14) и группируя члены с одинаковыми гармоническими составляющими, получим

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 2c_2a_{-1}a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1) + \\
 & + (c_1a_{-1} + 3c_3a_{-1}^2a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(-j\omega_1)e^{-j\omega_1t} + \\
 & + (c_1a_1 + 3c_3a_{-1}a_1^2W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(j\omega_1)e^{j\omega_1t} + \\
 & + c_2a_{-1}^2W^2(-j\omega_1)e^{-j2\omega_1t} + c_2a_1^2W^2(j\omega_1)e^{j2\omega_1t} + \\
 & + c_3a_{-1}^3W^3(-j\omega_1)e^{-j3\omega_1t} + c_3a_1^3W^3(j\omega_1)e^{j3\omega_1t}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь разложим в отрезок ряда Фурье на том же промежутке времени T выходной сигнал $y(t)$, который является реакцией динамического объекта на входную синусоиду, то есть представим его в виде

$$y(t) = \sum_{k=-m}^m b_k e^{jk\omega_1t}, \tag{17}$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а

$$\begin{aligned}
 b_k = & \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jk\omega_1t} dt = \\
 = & \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cos(k\omega_1t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \sin(k\omega_1t) dt, \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку в правой части уравнения (16) имеем лишь постоянную составляющую и гармоники с частотами $-3\omega_1, -2\omega_1, -\omega_1, \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$, то ряд (17) для реакции $y(t)$ объекта на синусоиду с частотой ω_1 тоже будет иметь лишь эти составляющие. Именно поэтому значения k при определении коэффициентов Фурье b_k заданы лишь в пределах от -3 до 3 .

Подставляя значение $y(t)$ из выражения (17) при $m=3$ в уравнение (16), получим тождество, которое будет выполняться лишь тогда, когда коэффициенты Фурье при одинаковых гармониках в правой и левой частях этого тождества будут равны.

Благодаря этому, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}
 b_0 = 2c_2a_{-1}a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1), \\
 b_{-1} = (c_1a_{-1} + 3c_3a_{-1}^2a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(-j\omega_1), \\
 b_1 = (c_1a_1 + 3c_3a_{-1}a_1^2W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(j\omega_1), \\
 b_{-2} = c_2a_{-1}^2W^2(-j\omega_1), \\
 b_2 = c_2a_1^2W^2(j\omega_1), \\
 b_{-3} = c_3a_{-1}^3W^3(-j\omega_1), \\
 b_3 = c_3a_1^3W^3(j\omega_1).
 \end{cases} \tag{19}$$

Из шестого и седьмого уравнений этой системы найдем, что

$$c_3 = \frac{b_{-3} + b_3}{a_{-1}^3W^3(-j\omega_1) + a_1^3W^3(j\omega_1)}, \tag{20}$$

из четвертого и пятого уравнений получим

$$c_2 = \frac{b_{-2} + b_2}{a_{-1}^2 W^2(-j\omega_1) + a_1^2 W^2(j\omega_1)}, \quad (21)$$

а из второго и третьего —

$$c_1 = \frac{b_{-1} - f_{-1}(a_{-1}, a_1, c_3, W) + b_1 - f_1(a_{-1}, a_1, c_3, W)}{a_{-1} W(-j\omega_1) + a_1 W(j\omega_1)}, \quad (22)$$

где

$$\begin{cases} f_{-1}(a_{-1}, a_1, c_3, W) = (3c_3 a_{-1}^2 a_1 W(j\omega_1) W(-j\omega_1)) W(-j\omega_1), \\ f_1(a_{-1}, a_1, c_3, W) = (3c_3 a_{-1} a_1^2 W(j\omega_1) W(-j\omega_1)) W(j\omega_1). \end{cases} \quad (23)$$

Как видим, первое уравнение системы (19) является избыточным: его можно использовать в качестве критерия правильности решения задачи.

Еще одним критерием правильности решения задачи может служить появление существенно отличающихся от нуля значений коэффициентов Фурье с номерами $k > 3$ и $-k < -3$ в выходном сигнале $y(t)$ при его разложении в ряд (17) при условии, что на вход объекта поступает лишь синусоида одной частоты ω_1 . Это будет значить, что реальная статическая характеристика $y(x)$ объекта должна аппроксимироваться степенным полиномом с порядком выше 3-го. При наличии гармоник с частотой $j4\omega_1$ и $-j4\omega_1$ в сигнале $y(t)$ для аппроксимации характеристики $y = f(x)$ полином нужно брать 4-го порядка, а при наличии гармоник с частотой $j5\omega_1$ и $-j5\omega_1$ этот полином должен иметь 5-ый порядок, и так далее по возрастанию.

Следует отметить, что повышение порядка полинома для аппроксимации характеристики $y = f(x)$ не слишком усложняет получение выражений для расчета коэффициентов этого полинома при условии использования на входе объекта синусоиды лишь одной частоты, поскольку для получения соотношений вида (19) и в этом случае в выражении вида (14) степени раскрываются по формуле бинома Ньютона.

Из соотношений (20), (21) (22) видим, что идентифицировать экстремальную статическую характеристику $y = f(x)$ динамического объекта рассматриваемого класса, можно лишь при условии, что известны значения АФЧХ $W(j\omega)$ линейной инерционной части этого объекта на частотах ω_1 и $-\omega_1$, то есть известны $W(j\omega_1)$ и $W(-j\omega_1)$. Поэтому в следующем разделе статьи пойдет речь о том, как найти эти значения.

Идентификация линейной инерционной части динамического объекта

Из физики любого динамического объекта известно, что пока его массовый или энергетический объем не наполнится массой или энергией, которые поступают вместе со входным воздействием, по крайней мере, наполовину, до тех пор процессы в этом объекте нарастают линейно, за исключением близкой к нулю зоны нечувствительности или люфта.

Поэтому, если сформировать входное воздействие на объект так, чтобы его уровень соответствовал установившемуся уровню реакции этого объекта на прилагаемое входное воздействие (рис. 3), то можно утверждать, что в диапазоне значений выходной координаты $y(t)$ от $0,1y_{уст}$ до $0,5y_{уст}$ объект будет вести себя как линейный.

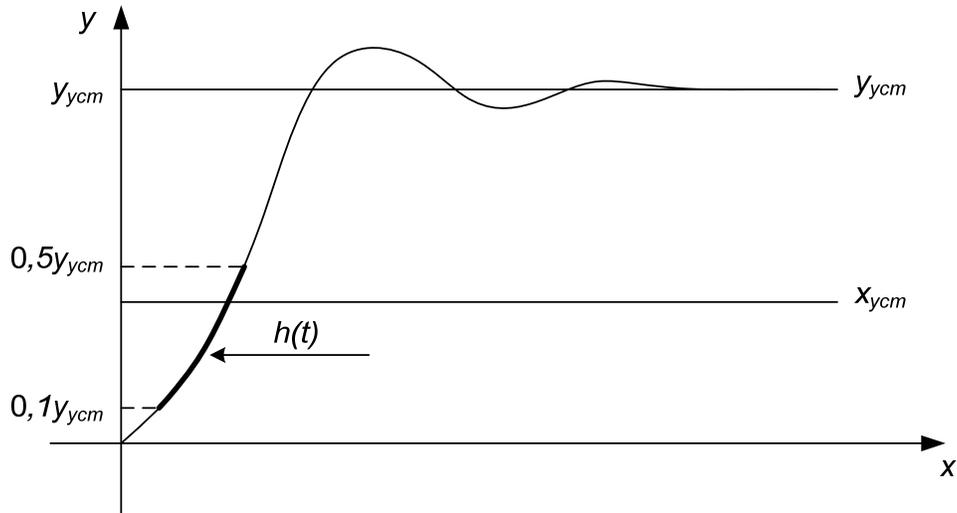


Рис. 3. График переходного процесса в динамическом объекте после подачи на его вход ступенчатого воздействия на уровне его установившегося значения

И если входное воздействие подается скачком от 0 до $x_{уст}$, то в указанном диапазоне значений $y(t)$ выходная координата будет совпадать с переходной характеристикой $h(t)$ линейной части этого объекта, которая для объекта с одним объемом концентрации энергии или массы имеет вид:

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (24)$$

для объекта с двумя объемами концентрации энергии или массы —

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad (25)$$

или

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \cos \beta t \right), \quad (26)$$

а для объекта с тремя объемами концентрации энергии или массы —

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} - \lambda_3 e^{-\frac{t}{T_3}} \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (27)$$

или

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \cos \beta t \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (28)$$

Для большего количества объемов концентрации энергии или массы ряд аппроксимативных функций для $h(t)$ можно продолжить, пользуясь тем же принципом, но в Наукові праці ВНТУ, 2009, № 2

этом нет необходимости, поскольку в задачах синтеза систем экстремального регулирования передаточную функцию линейной части динамического объекта нет смысла брать выше третьего порядка, так как система регулирования рабочую точку от точки экстремума далеко не отпускает.

Очевидно, что для всех вышеприведенных выражений для $h(t)$ параметр K можно найти из выражения

$$K = \frac{y_{уст}}{x_{уст}}. \quad (29)$$

Поэтому для аппроксимации $h(t)$ в виде (24) нужно из кривой $y(t)$ (см. рис. 3) воспользоваться лишь одной точкой в диапазоне $0,1y_{уст} \leq y(t) \leq 0,5y_{уст}$ для определения параметра T_1 . Очевидно, что его можно найти из уравнения

$$h(t_1) = K \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right). \quad (30)$$

Для аппроксимации $h(t)$ в виде (26) для определения параметров T_1 и β нужно воспользоваться уже двумя точками из этого же диапазона $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$. Для них система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} h(t_1) = K \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \cos \beta t_1 \right), \\ h(t_2) = K \left(1 - e^{-\frac{t_2}{T_1}} \cos \beta t_2 \right). \end{cases} \quad (31)$$

Таким же способом можно рассчитать параметры всех других аппроксимаций характеристики $h(t)$.

После этого необходимо, воспользовавшись несколькими (например, M) точками диапазона $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$ с индексом l , рассчитать для всех найденных аппроксимаций $h_i(t)$, $i = \overline{1, r}$ средний квадрат Δ_i погрешности аппроксимации с помощью выражения

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^M (y_l^* - h_i(t_l))^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad (32)$$

где y_l^* — значение переходной характеристики, взятое из экспериментального графика (см. рис. 3), а $h_i(t_l)$ — значение этой характеристики, высчитанное с помощью аппроксимирующего выражения.

То из чисел $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$, которое окажется наименьшим, и будет определять наилучшую аппроксимацию переходной характеристики $h(t)$ линейной части динамического объекта по критерию минимума суммы квадратов погрешностей на «свежих» точках.

Зная переходную характеристику $h(t)$ линейной части объекта, легко найти ее передаточную функцию $W(p)$, ведь [1]

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (33)$$

а для получения $W(p)$ по известной $g(t)$ нужно воспользоваться выражением (9).

В свою очередь значения $W(j\omega_1)$ и $W(-j\omega_1)$, которые нужны нам для идентификации экстремальной статической характеристики $y = f(x)$, мы получим прямой подстановкой в выражение для передаточной функции $W(p)$, полученное с помощью преобразования (9), вместо оператора p значений $j\omega_1$ и $-j\omega_1$.

Конечно, если после нескольких однотипных экспериментов с подачей на вход объекта одинакового уровня входного воздействия ступенчатого характера мы получим экспериментальные кривые $y(t)$, которые не будут совпадать в диапазоне $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$, то параметры аппроксимаций $h(t)$ в виде (24) – (28) следует вычислять, пользуясь стандартной процедурой метода наименьших квадратов [3].

Выводы

1. Предложен метод идентификации нелинейных динамических объектов с экстремальными характеристиками, алгоритм которого предусматривает подачу на вход объекта сначала ступенчатого сигнала, а затем синусоиды одной частоты.

2. Линейная инерционная часть динамического объекта с помощью данного метода идентифицируется переходной характеристикой $h(t)$ с последующим переходом к импульсной переходной характеристике $g(t)$ и далее — к передаточной функции $W(p)$ и АФЧХ $W(j\omega)$, а нелинейная безынерционная статическая характеристика $y = f(x)$ объекта идентифицируется степенным полиномом.

3. Во время вывода расчетных соотношений предложенного метода использована идеология Фурье-интегрального метода идентификации (ФИМИ), разработанного в 80-е годы прошлого столетия Б. И. Мокиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1973. – 528 с.
2. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
3. Мокін Б.І., Мокін В.Б., Мокін О.Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2005. – 300 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов). – М.: Наука, 1967. – 608 с.

Мокин Борис Иванович – профессор кафедры электромеханических систем автоматизации в промышленности и на транспорте, ректор;

Мокин Александр Борисович – доцент кафедры электромеханических систем автоматизации в промышленности и на транспорте.

Винницкий национальный технический университет.