УДК 519.65.652

И. В. Богач, к. т. н.; М. А. Машницкий; А. Ф. Хомчук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ МОДИФИКАЦИИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА БЕССЕЛЯ

В данной статье представлена разработка метода моделирования трехмерных поверхностей на основе модификации разностного метода Бесселя. Рассмотрен пример использования разработанного метода.

Ключевые слова: *интерполяция, моделирование поверхностей, разностный метод Бесселя, функция двух переменных, трехмерная поверхность.*

Актуальность. Постановка задачи

Моделирование трехмерных поверхностей – достаточно актуальная задача. Стремительное развитие техники, электронных систем приводит к необходимости исследования эффективности разработанных устройств, которая зависит, в том числе, и от координат его расположения, например, изменение влажности в комнате, зависящее от расположения кондиционера. При исследовании объекта, который описывается функцией трех переменных, возникает задача идентификации его математической модели. Для решения этой задачи и целесообразно применить математическое моделирование, объединяющее эксперимент и теорию. Именно такое моделирование используется в медицине, космических исследованиях, геофизике, что в значительной мере расширяет области внедрения результатов исследования, кроме традиционной компьютерной графики.

Один из распространенных методов моделирования функций – интерполяционный метод Бесселя, разработанный только для функций двух переменных. В этой статье предлагается модификация метода Бесселя для моделирования трехмерных поверхностей.

Задача моделирования трехмерных поверхностей на основе интерполяции функции основывается на построении функции $F(x, y, z)$, которая принимает в некоторых точках x_i, y_j, z_k $(i, j, k = \overline{0, n})$, которые называют узлами интерполяции (отдельные значения запишутся $F(x_0, y_0, z_0) = \varphi_{000}$, $F(x_1, y_1, z_1) = \varphi_{111}$, …, $F(x_n, y_n, z_n) = \varphi_{nnn}$). В общем случае интерполяция функции сводится к нахождению ее нетабличных значений [1 – 5].

Задачи моделирования трехмерной поверхности необходимо решать, в случае: обработки изображений, топографической информации, а также в различных видах диагностирования и т. п. В этом направлении ведется активная исследовательская работа ведущих организаций, производящих графические ускорители и программное обеспечение для трехмерного моделирования и создания специальных эффектов.

Целью работы является повышение эффективности моделирования путем расширения классических методов при использовании трех переменных.

Описание метода

Для вывода формулы Бесселя используем вторую интерполяционную формулу Гаусса [6]:

$$\begin{aligned}P(x,y,z) = {} & \varphi_{0,0,0} + p\Delta^{100}\varphi_{-1,0,0} + q\Delta^{010}\varphi_{0,-1,0} + r\Delta^{001}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p}{2!}\Delta^{200}\varphi_{-1,0,0} + \\ & + pq\Delta^{110}\varphi_{-1,-1,0} + pr\Delta^{101}\varphi_{-1,0,-1} + qr\Delta^{011}\varphi_{0,-1,-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^{020}\varphi_{0,-1,0} + \\ & + \frac{(r+1)r}{2!}\Delta^{002}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-2,0,0} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\times \\ & \times\Delta^{030}\varphi_{0,-2,0} + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{0,0,-2} + \frac{(p+1)pq}{2!}\Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0} + \\ & + \frac{(p+1)pr}{2!}\Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{p(q+1)q}{2!}\Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0} + \frac{(q+1)qr}{2!}\Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1} + \\ & + \frac{p(r+1)r}{2!}\Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{q(r+1)r}{2!}\Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1} + pqr\Delta^{111}\varphi_{-1,-1,-1} + \ldots\end{aligned} \quad (1)$$

Возьмем $(2n+2)^3$ равноудаленных узлов интерполяции в направлении всех переменных интерполирования: $(x_{-n},y_{-n},z_{-n}),(x_{-(n-1)},y_{-(n-1)},z_{-(n-1)}),\ldots,(x_0,y_0,z_0),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),(x_n,y_n,z_n)$, $(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ с шагом h_x,h_y,h_z соответственно, к направлениям интерполяции $\varphi_{i,j,k} = f(x_i,y_j,z_k)$, $(i=\overline{-n,n+1},\ \ j=\overline{-n,n+1},\ k=\overline{-n,n+1})$ – заданы значения функции $\varphi = f(x,y,z)$

Если принять за начальные значения $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ та $\varphi=\varphi_0$, и если использовать узлы (x_i,y_j,z_k), $(i=\overline{-n,n},\ j=\overline{-n,n},\ k=\overline{-n,n})$, то получим выражение:

$$\begin{aligned}P(x,y,z) = {} & \varphi_{0,0,0} + p\Delta^{100}\varphi_{-1,0,0} + q\Delta^{010}\varphi_{0,-1,0} + r\Delta^{001}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p}{2!}\Delta^{200}\varphi_{-1,0,0} + \\ & + pq\Delta^{110}\varphi_{-1,-1,0} + pr\Delta^{101}\varphi_{-1,0,-1} + qr\Delta^{011}\varphi_{0,-1,-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^{020}\varphi_{0,-1,0} + \\ & + \frac{(r+1)r}{2!}\Delta^{002}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-2,0,0} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\times \\ & \times\Delta^{030}\varphi_{0,-2,0} + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{0,0,-2} + \frac{(p+1)pq}{2!}\Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0} + \\ & + \frac{(p+1)pr}{2!}\Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{p(q+1)q}{2!}\Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0} + \frac{(q+1)qr}{2!}\Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1} + \\ & + \frac{p(r+1)r}{2!}\Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{q(r+1)r}{2!}\Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1} + pqr\Delta^{111}\varphi_{-1,-1,-1} + \ldots\end{aligned} \quad (2)$$

Примем за начальные значения $x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1$ та $\varphi=\varphi_1$, и используем узлы $(x_{1+i},y_{1+j},z_{1+k})$, $(i=\overline{-n,n},\ j=\overline{-n,n},\ k=\overline{-n,n})$.Тогда

$\dfrac{x-x_1}{h_x} = \dfrac{x-x_0-h}{h_x} = p-1;$ $\dfrac{y-y_1}{h_y} = \dfrac{y-y_0-h}{h_y} = q-1;$ $\dfrac{z-z_1}{h_z} = \dfrac{z-z_0-h}{h_z} = r-1$, при этом, соответственно, индексы всех разниц в правой части формулы (2) увеличатся на единицу. Если заменить в правой части формулы (2) *q* на *q – 1* увеличить индекс всех разниц на 1, то получим вспомогательную интерполяционную формулу:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) = {} & \varphi_{1,1,1} + (p-1)\Delta^{100}\varphi_{0,1,1} + (q-1)\Delta^{010}\varphi_{1,0,1} + (r-1)\Delta^{001}\varphi_{1,1,0} + \frac{p(p-1)}{2!}\times \\
& \times\Delta^{200}\varphi_{0,1,1} + (p-1)(q-1)\Delta^{110}\varphi_{0,0,1} + (p-1)(r-1)\Delta^{101}\varphi_{0,1,0} + 3 \\
& + (q-1)(r-1)\Delta^{011}\varphi_{1,0,0} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^{020}\varphi_{1,0,1} + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^{002}\varphi_{1,1,0} + \\
& + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-1,1,1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^{030}\varphi_{1,-1,1} + \\
& + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{1,1,-1} + \frac{p(p-1)(q-1)}{2!}\Delta^{210}\varphi_{0,0,1} + \\
& + \frac{p(p-1)(r-1)}{2!}\Delta^{201}\varphi_{0,1,0} + \frac{(p-1)q(q-1)}{2!}\Delta^{120}\varphi_{0,0,1} + \\
& + \frac{q(q-1)(r-1)}{2!}\Delta^{021}\varphi_{1,0,0} + \frac{(p-1)r(r-1)}{2!}\Delta^{102}\varphi_{0,1,0} + \\
& + \frac{(q-1)r(r-1)}{2!}\Delta^{012}\varphi_{1,0,0} + (p-1)(q-1)(r-1)\Delta^{111}\varphi_{0,0,0} + \ldots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Возьмем среднее арифметическое формул (2) и (3) и после несложных преобразований получим интерполяционную формулу Бесселя:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) = {} & \frac{\varphi_{1,1,1} + \varphi_{0,0,0}}{2} + (p-\frac{1}{2})\Delta^{100}\varphi_{0,1,1} + (q-\frac{1}{2})\Delta^{010}\varphi_{1,0,1} + (r-\frac{1}{2})\Delta^{001}\varphi_{1,1,0} + \\
& + \frac{p(p-1)}{2!}\frac{\Delta^{200}\varphi_{0,1,1} + \Delta^{200}\varphi_{-1,0,0}}{2} + (p-\frac{1}{2})(q-\frac{1}{2})\Delta^{110}\varphi_{0,0,1} + (p-\frac{1}{2})\times \\
& \times(r-\frac{1}{2})\Delta^{101}\varphi_{0,1,0} + 3(q-\frac{1}{2})(r-\frac{1}{2})\Delta^{011}\varphi_{1,0,0} + \frac{q(q-1)}{2!}\times \\
& \times\frac{\Delta^{020}\varphi_{1,0,1} + \Delta^{020}\varphi_{0,-1,0}}{2} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{\Delta^{002}\varphi_{1,1,0} + \Delta^{002}\varphi_{0,0,-1}}{2} + \\
& + \frac{p(p-\frac{1}{2})(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-1,1,1} + \frac{q(q-\frac{1}{2})(q-1)}{3!}\Delta^{030}\varphi_{1,-1,1} + \frac{r(r-\frac{1}{2})(r-1)}{3!}\times \\
& \times\Delta^{003}\varphi_{1,1,-1} + \frac{p(p-1)(q-\frac{1}{2})}{2!}\frac{\Delta^{210}\varphi_{0,0,1} + \Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0}}{2} + \frac{p(p-1)(r-\frac{1}{2})}{2!}\times \\
& \times\frac{\Delta^{201}\varphi_{0,1,0} + \Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1}}{2} + \frac{(p-\frac{1}{2})q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^{120}\varphi_{0,0,1} + \Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0}}{2} + \\
& + \frac{q(q-1)(r-\frac{1}{2})}{2!}\frac{\Delta^{021}\varphi_{1,0,0} + \Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1}}{2} + \frac{(p-\frac{1}{2})r(r-1)}{2!}\times \\
& \times\frac{\Delta^{102}\varphi_{0,1,0} + \Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1}}{2} + \frac{(q-\frac{1}{2})r(r-1)}{2!}\frac{\Delta^{012}\varphi_{1,0,0} + \Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1}}{2} + \\
& + (p-\frac{1}{2})(q-\frac{1}{2})(r-\frac{1}{2})\Delta^{111}\varphi_{0,0,0} + \ldots,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $p = \dfrac{x - x_0}{h_x}$, $q = \dfrac{y - y_0}{h_y}$, $r = \dfrac{z - z_0}{h_z}$.

Введем обозначения обобщенной степени для функций трех переменных. Обобщенной степенью чисел p, q и r будем называть множимое, которое содержит в себе n множителей, первый из которых равняется $\left(p - \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(q - \dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(r - \dfrac{1}{2}\right)$, при условии, что n – непарное число. Если n – парное число то первый множитель равен p, q, и r, а каждый последующий на i^2 меньше от предыдущего ($i = \overline{1..(\lceil n/2 \rceil - 1)}$):

$$
\begin{aligned}
p^{[n]} &= \left(p - \frac{1}{2}\right)^c p(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)...(p+(w-1)) ; \\
q^{[n]} &= \left(q - \frac{1}{2}\right)^c q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)...(q+(w-1)) ; \qquad (5) \\
r^{[n]} &= \left(r - \frac{1}{2}\right)^c r(r-1)(r+1)(r-2)(r+2)...(r+(w-1)) ,
\end{aligned}
$$

где $c = \begin{cases} 1, \text{ при } \; n = 1,3,5,... \\ 0, \text{ при } \; n = 2,4,6,... \end{cases}$; $w = \lceil n/2 \rceil$.

$$
P(x,y,z) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{p^{[i]} \cdot q^{[j]} \cdot r^{[k]}}{i! \cdot j! \cdot k!} \frac{\Delta^{i,j,k} \varphi_{m,l,u} + \Delta^{i,j,k} \varphi_{m+1,l+1,u+1}}{2} , \qquad (6)
$$

где $m = -\lceil i/2 \rceil$; $l = -\lceil j/2 \rceil$; $u = -\lceil k/2 \rceil$.

Интерполяционная формула Бесселя (6), как следует из способа выведения, являет собой полином, который совпадает с заданной функцией $\varphi = f(x,y,z)$ в *2n+2* точках $(x_{-n}, y_{-n}, z_{-n}), (x_{-(n-1)}, y_{-(n-1)}, z_{-(n-1)}), ..., (x_0, y_0, z_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), (x_n, y_n, z_n), (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$.

Оценка погрешности интерполяционной формулы Бесселя

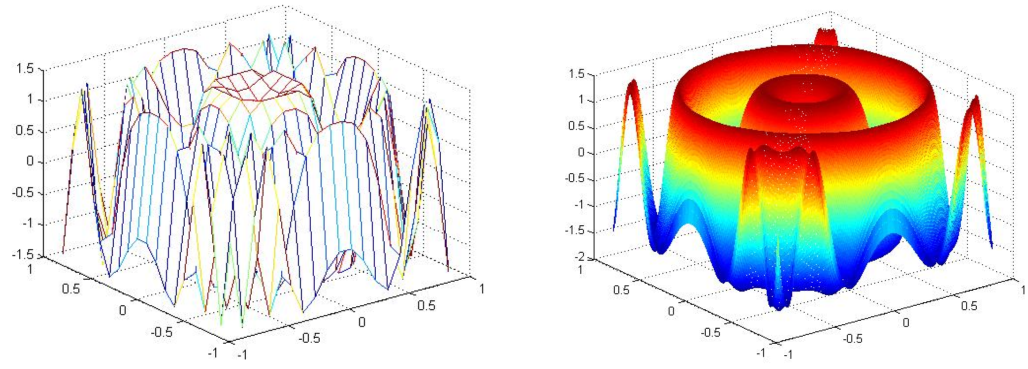
Если *2n+1* – порядок максимальной использованной разницы таблицы, $x \in [x_0 - nh, x_0 + nh]$, $y \in [y_0 - nh, y_0 + nh]$ та $z \in [z_0 - nh, z_0 + nh]$ то:

$$
\begin{aligned}
R_n(x,y,z) = {} & q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)...(q^2 - (n+1)) p(p^2 - 1^2)(p^2 - 2^2)...(p^2 - (n+1)) r(r^2 - 1^2) \times \\
& \times (r^2 - 2^2)...(r^2 - (n+1)) \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2),(2n+2),(2n+2)}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{(2n+2)!(2n+2)!(2n+2)!} , \qquad (7)
\end{aligned}
$$

где $p = \dfrac{x - x_0}{h_x}$, $q = \dfrac{y - y_0}{h_y}$, $r = \dfrac{z - z_0}{h_z}$, $\xi_x \in [x_0 - nh, x_0 + nh]$, $\xi_y \in [y_0 - nh, y_0 + nh]$ та $\xi_z \in [z_0 - nh, z_0 + nh]$.

Если функция $f(x,y,z)$ задана в виде таблицы, то при небольшом шаге h принимают:

$$R_n(x,y,z) = q(q^2-1^2)(q^2-2^2)...(q^2-n^2)p(p^2-1^2)(p^2-2^2)...(p^2-n^2)\times$$
$$\times r(r^2-1^2)(r^2-2^2)...(r^2-n^2)\times \quad ,$$
$$\times\frac{\Delta^{(2n+1),(2n+1),(2n+1)}y_{-n-1,-n-1,-n-1}+\Delta^{(2n+1),(2n+1),(2n+1)}y_{-n,-n,-n}}{2(2n+1)!(2n+1)!(2n+1)!} \qquad (8)$$



а) б)

Рис. 1. Построение поверхностей методом Бесселя

На рис. 1 а изображена поверхность, полученная из начальных значений функции $\varphi(x,y,z)$. На рис. 1 б представлена поверхность, полученная в результате использования модифицированной интерполяционной формулы Бесселя для функции, которая зависит от функции трех переменных.

Выводы

В данной статье предложено метод математического моделирования трехмерных поверхностей с помощью модифицированной интерполяционной функции трех переменных методом Бесселя.

Предложенная математическая модель достаточно простая и эффективная и может быть использована в разных областях, таких как медицина, космические исследования, геофизика для моделирования трехмерных поверхностей, интерполяции или восстановления функций, которые описывают величину, зависящую от координат пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Половко А. М., Бутусов П. Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

2. Квєтний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень. – Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.

3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – [2 изд.]. – М.: Наука, 1987. – 598 с.

4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЕОМ. – Киев: Наукова думка,1986. – 584 с.

6. Машницький М. О. Квєтний Р. Н. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Гауса // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Спецвипуск, 2007. – С.105 - 108.

Богач Илона Виталиевна – к. т. н., доцент кафедры автоматики и информационно-измерительной техники, +380-50-388-66-78, ibogatch@mail.ru.

Машницкий Максим Александрович – аспирант кафедры автоматики и информационно-измерительной техники.

Хомчук Анатолий Феофанович – старший преподаватель кафедры автоматики и информационно-измерительной техники, +380-432-598-006.

Винницкий национальный технический университет.