

УДК 621.7:519.85

В. М. Михалевич, д. т. н., проф.; Ю. В. Добранюк; А. В. Михалевич

**ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ В
MARLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ
ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

Рассмотрена задача определения предельных деформаций сложного деформирования, которое происходит на свободной боковой поверхности при осесимметричной осадке с варьированием условий трения на торцах. Освещены ключевые моменты этой задачи. Показано, что применение стандартных команд системы Maple для решения рассматриваемой задачи не является эффективным с точки зрения временных затрат на проведение вычислений. Проанализированы разные подходы к построению эффективных вычислительных схем. Показано, что наиболее эффективной является схема, которая основывается на применении комбинированного метода хорд и касательных.

***Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние; осадка цилиндрических образцов; накопленная деформация, модель разрушения; итерационные методы.*

Постановка проблемы и анализ последних исследований

Объект исследования. Процессы сложного деформирования.

Предмет исследования. Математическая модель предельных деформаций на свободной боковой поверхности при осевой осадке цилиндрических образцов с разными условиями трения на торцах.

Цель исследования. Поиск эффективных вычислительных схем в среде математического пакета Maple для задачи определения предельных деформаций сложного деформирования, которое возникает при осевой осадке цилиндрических заготовок с разными условиями трения на торцах.

Задачи исследования: 1. Выбор модели накопления повреждений. 2. Определение модели напряженно-деформированного состояния на свободной боковой поверхности при осевой осадке цилиндрических образцов с разными условиями трения на торцах. 3. Постановка математической задачи определения предельных деформаций сложного деформирования и исследования альтернативных методов ее решения в среде Maple. 4. Определение эффективной схемы решения задачи и наглядного представления зависимости предельных деформаций от процесса изменения напряженно-деформированного состояния критической области заготовки.

Актуальность работы. Решение задач теории деформирования приводит к большому количеству вычислений [1 – 3]. И невзирая на мощность современных вычислительных средств, в ряде случаев, задача разработки эффективных вычислительных схем остается достаточно актуальной.

Основная часть

Согласно классификации, которая предложена в [1], сложным деформированием будем называть такой процесс немонотонного деформирования, при котором компоненты направляющего тензора приращений пластических деформаций изменяются непрерывно. Для определения предельных деформаций сложного деформирования в рамках теории непрерывных повреждений разработан ряд моделей [1, 2, 4, 5]. Рассмотрим самый простой вариант: модель, которая базируется на линейном принципе накопления повреждений, – модель Колмогорова [4, 2, 1]:

$$\psi(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c} \cdot [\eta(\varepsilon_u)]}, \quad (1)$$

где ψ – поврежденность макрочастицы, которая изменяется от 0 в начальном состоянии до 1 при достижении предельного состояния; ε_u – накопленная пластическая деформация:

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где τ, t – время; $\dot{\varepsilon}_u$ – интенсивность скоростей деформаций; $\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(\eta)$ – кривая предельных деформаций для условия стационарного деформирования; η – показатель напряженного состояния [1, 2, 6].

С учетом (1), условие достижения предельного состояния приобретает вид:

$$\psi(\varepsilon_*) = 1, \quad (3)$$

или

$$\int_0^{\varepsilon_*} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c} \cdot [\eta(\varepsilon_u)]} = 1, \quad (4)$$

где ε_* – предельная деформация для условия немонотонного, в частности, сложного деформирования.

Как видно из представления (4), нахождения предельной деформации ε_* сводится к решению нелинейного уравнения. Нелинейная функция представлена определенным интегралом с переменным верхним пределом. Следует отметить, что внешне простое уравнение (4) в отдельных случаях может привести к достаточно громоздким соотношениям и, главное, к значительному времени для проведения расчетов при получении решения.

Для определения напряженно-деформированного состояния на свободной боковой поверхности при осевой осадке цилиндрических заготовок воспользуемся результатами, которые приведены в работах [7, 8]. Кривую предельных деформаций для стационарного деформирования будем аппроксимировать выражением:

$$\varepsilon_{*c}(\eta) = \varepsilon_{*c}(\eta=0) \cdot \left(\frac{(1-\eta) \cdot \varepsilon_{*c}(\eta=-1) + (1+\eta) \cdot \varepsilon_{*c}(\eta=0)}{2 \cdot \varepsilon_{*c}(\eta=0)} + \frac{(1+\eta) \cdot \varepsilon_{*c}(\eta=0)}{2 \cdot \varepsilon_{*c}(\eta=1)} \right)^{-\eta}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_{*c}(\eta=-1)$, $\varepsilon_{*c}(\eta=0)$, $\varepsilon_{*c}(\eta=1)$ – предельная деформация сжатия, кручения и растяжения соответственно.

С учетом числовых значений параметров модели, уравнение (4) может быть представлено в следующем виде: $\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], m > 0 \right)$

$$m \cdot \int_0^\alpha \frac{1,47 \cdot \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4 x}}}{\left(\frac{(1-3 \cdot \cos^2 x) \ln \left(\frac{0,94(1-3 \cdot \cos^2 x)}{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4 x}} \right)}{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4 x}} \right)} dx - 1 = 0, \quad (6)$$

где m – отображает условия трения на торцах и считается постоянным в процессе исследования конкретного образца [6, 8]; α – параметр процесса осадки.

Корень уравнения (6) будем обозначать через α_* , $\alpha_* \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Заметим, что соотношение (5), (6) наводятся впервые в данной работе. Изложению Наукові праці ВНТУ, 2009, № 2

методики получения этих уравнений будут посвящены отдельные работы.

Следовательно, задача определения предельных деформаций при условиях осевой осадки цилиндрических образцов с разными условиями трения на торцах сводится к решению уравнения (6) для конкретных значений m . После нахождения соответствующих значений α_* легко могут быть найдены координаты предельной точки на соответствующем пути деформирования $\eta(\varepsilon_u) = \eta[\varepsilon_u(\alpha)]$. В данной работе рассмотрим такие альтернативные способы решения поставленной задачи: 1. Непосредственное применение стандартной команды системы Maple для получения численного решения нелинейного уравнения; 2. Разложения подынтегральной функции в степенной ряд с последующим интегрированием, которое должно повысить скорость вычисления значений исследуемой нелинейной функции; 3. Применение итерационных методов численного нахождения решения нелинейного уравнения.

В системе Maple для численного решения одного уравнения или системы уравнений (линейных или нелинейных) предусмотрена команда `fsolve`.

Для вычисления значений левой части уравнения (6) при конкретных значениях m , α создадим процедуру `Psk(m, α)`:

```
> Psk :=
(m, alpha) -> evalf(m*Int(1.47*sqrt(3+1/(cos(x)^4)/exp(...)), x=0..
alpha)-1);
```

Для экономии места и предотвращения рассеивания внимания очевидная часть программного кода опущена. Фактически эта процедура реализует численное нахождение определенного интеграла с помощью стандартной команды `evalf`. Принципиальным в процедуре является то, что команда нахождения интеграла `Int` записана с большой буквы в инертной форме. В таком случае система сразу же будет применять численный алгоритм нахождения интеграла. В противном случае, при задании интеграла командой `int`, система сначала будет пытаться найти интеграл в символьном виде, что потребует определенного времени, и только после того, как удостоверится, что первообразной найти не может, автоматически подключит алгоритм численного интегрирования.

Для применения команды `fsolve` также создадим процедуру `Розв_к``:

```
> Розв_к` := proc(m, `диапазон`:: range)
if type(m, numeric) then
  fsolve(Psk(m, t)-1, t, `диапазон`)
else
  'procname'(m, `диапазон`)
end if
end proc;
```

Следует отметить, что наличие в процедуре `Розв_к`` конструкции с оператором `'procname'(m, `диапазон`)` для обработки ситуации в случае не численного значения параметра m , является ключевой для построения графика функции $\alpha_* = \alpha_*(m)$.

Вычисление корня для конкретного значения m система выполняет примерно за 7 сек., что легко определить с помощью конструкции:

```
> `Старт` := time(): `Розв_к`(0.09, 0..1.5); `Фініш` := time() -
`Старт`;
1.380775711
T_k 7.344
```

На построение графика $\alpha_* = \alpha_*(m)$ в диапазоне $m \in [0, 0.1, 8]$ система тратит больше 20 минут (!!!). Конечно, в современных условиях такая ситуация неприемлема, поскольку, в частности, время решения не коррелируется с степенью сложности задачи. Все вычисления проводили на компьютере с центральным процессором AMD Sempron, 1500 MHz (9 x 167)

2200+.

Подход, базирующийся на разложении подынтегральной функции в степенной ряд с последующим интегрированием, выглядит заманчивым в связи с легкостью реализации этих операций в среде системы Maple. Предполагалось, что замена полиномом сложной функции, которая определяется определенным интегралом с переменным верхним пределом, должна ускорить численное нахождение корня нелинейного уравнения.

С помощью команд $\text{taylor}(f(x), x=0, 17)$; $\text{convert}(\%, \text{polynom}, x)$, где $f(x)$ – подынтегральная функция в соотношении (6), будем иметь соответствующий полином:

$$0,77 + 1,11 \cdot x^2 + 1,38 \cdot x^4 + 1,32 \cdot x^6 + 1,0 \cdot x^8 + 0,59 \cdot x^{10} + 0,23 \cdot x^{12} + 0,01 \cdot x^{14} - 0,07 \cdot x^{16}. \quad (7)$$

На рис.1 представлено сопоставление графиков подынтегральной функции $f(x)$ и ее разложения в ряд (7) в окрестности точки $x=0$:

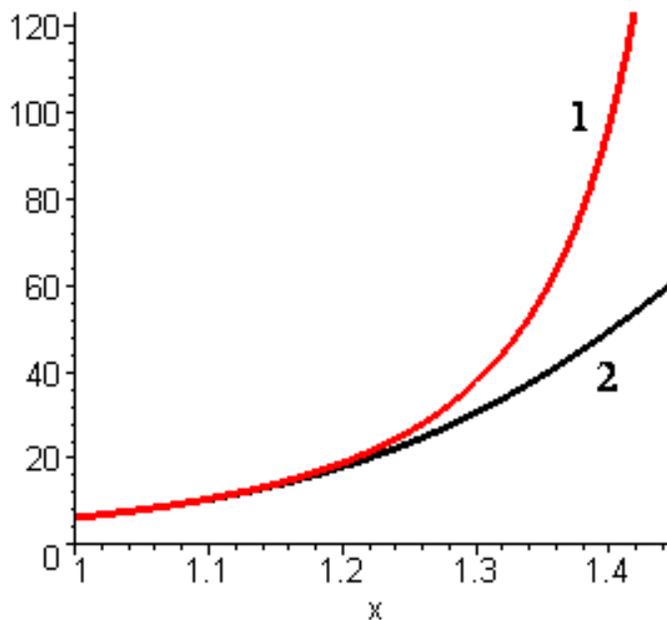


Рис. 1. Сопоставление графиков подынтегральной функции $f(x)$ и ее разложения в ряд (7) в окрестности точки $x=0$, где 1 – функция $f(x)$; 2 – полином (7)

Как видно, при $x > 1,18$ согласование нельзя признать удовлетворительным. Повышением степени полинома и изменением точки, в окрестности которой происходит разложение, существенного улучшения результата достичь не удалось. При использовании аппроксимации (7) корни уравнения (6) с удовлетворительной точностью получаются только для $m > 0,18$. Следовательно, в данном случае речь уже идет не о скорости вычисления, а о неудовлетворительной точности получения результатов.

Итерационные методы де-факто наиболее распространенные методы получения решений нелинейных уравнений. К лидерам итерационных методов относятся методы хорд, касательных и секущих.

Принципиальное отличие метода секущих [9] от метода касательных в том, что в первом методе на каждом шагу вычисляется только новое значение функции, в то время, когда во втором методе на каждом шаге вычисляется как значение функции, так и ее производная. Поэтому, невзирая на менее быструю сходимость метода секущих сравнительно с методом касательных, за счет меньшего количества вычислений на каждом шаге, первый метод может оказаться эффективнее. Поскольку в рассматриваемом случае функция представляет собой определенный интеграл с переменным верхним пределом, то время вычисления значений производной от функции пренебрежимо мало в сравнении с вычислением значений самой функции. Следовательно, приведенные рассуждения позволяют отбросить метод секущих и

сосредоточиться на методах хорд и касательных.

Каждый из этих методов имеет один и тот же недостаток, который заключается в том, что приближение к корню происходит с одной стороны. Этот факт осложняет построение критерия завершения итераций.

Применение комбинированного метода хорд и касательных позволяет получить удобный признак достижения заданной точности: каждый из этих методов порождает последовательность значений, которые приближаются к корню из разных сторон. Вычисления завершаются при условии, что разница между текущими приближениями к корню, которые вычислены по двум методам, станет меньше требуемой степени точности.

Для применения метода хорд нужно выделить отрезок, который содержит корень и на котором функция монотонна. Для применения метода касательных нужно выделить отрезок, который содержит корень и на котором функция не только монотонна, но и не имеет точки перегиба. Можно доказать, что функция, которая определяется левой частью уравнение (6) монотонно возрастающая и вогнутая на области определения при любых значениях $m > 0$. Авторы нашли красивое доказательство этого факта, чему будет посвящена отдельная работа. Следовательно, по методу хорд приближение к корню будет происходить слева, а по методу касательных – справа.

Показательной является реализация в среде системы Maple метода касательных (метод Ньютона) [10]. Приведем процедуру, которая по заданной функции автоматически генерирует формулу итерации.

```
> `М_ньютон` := proc (y: :procedure)
    ( (m, x) -> x) - eval (y) / D[2] (eval (y))
end proc:
```

В данном случае легко записать формулу итерации:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(m, \alpha_n)}{f'(\alpha_n)}, \quad (8)$$

где α_n – текущее приближение корня α_* соотношения (6); $F(m, \alpha_n)$ – левая часть равенства (6); $f'(x)$ – подынтегральная функция в соотношении (6).

В подавляющем большинстве других случаев приведенная процедура освобождает от необходимости выполнения, подчас достаточно громоздкой, операции дифференцирования.

Команда

```
> `Колм_Ньют` := `М_Ньютон` (PsK) ;
```

позволяет получить функцию для вычисления методом касательных текущего приближенного значения корня уравнения (6).

Нужно заметить, что избыточная сложность может привести к заметному ухудшению эффективности вычислений. Реализуем метод хорд следующими процедурами:

```
> `М_хорд` := proc (F: :procedure, m, x1, x2)
    evalf (x1 * F (m, x2) - x2 * F (m, x1) ) / ( F (m, x2) - F (m, x1) ) ;
end proc:
```

Получаем конкретное выражение для функции PsK:

```
> `Колм_хорд` := `hord` (PsK, m, X1, X2) .
```

Превращаем выражение в функцию:

```
> `Колм_хорд` := unapply ( `Колм_хорд` , m, x1, x2) .
```

Выражения, которые выводятся на экран в результате работы этих процедур, не приводим в связи с получением слишком громоздких выражений. Воспроизведя приведенные команды в среде Maple, эти выражения можно увидеть. Выражение, которое используется в процедуре для вычисления текущих приближений корня методом хорд, содержит несколько элементов, которые повторяются. В частности, выражение

$$\sqrt{1 + 3 \cdot \cos^4 x}$$

встречается трижды и каждый раз вычисляется заново. С точки зрения основ программирования такая ситуация не выдерживает никакой критики. Но это еще одно свидетельство тому, что когда речь идет о численных вычислениях, этих основ следует придерживаться, невзирая на безумный рост вычислительной мощности современных компьютеров. В данном случае для достижения точности 0,005 при $m=2$ комбинированным методом понадобилось выполнить 80 шагов, а уже для достижения точности 0,0005 понадобилось 788 шагов. Причем анализ результатов показал, что такое неестественно большое для комбинированного метода количество итераций связано именно с текущими приближениями, которые вычисляются по методу хорд. В то время, когда метод касательных уже на четвертой итерации давал результат, который превышал заданную точность и оставался неизменным на всех следующих итерациях. Почему именно это происходит авторы не стали объяснять в силу того, что сама ситуация была создана, в данном случае, искусственно.

Для построения графика кривой предельных деформаций при осадке цилиндрических образцов с разными условиями трение на торцах создадим следующую процедуру:

```
> `График` := proc (m, X1, X2, dx)
local a, b, x0;
if type(m, numeric) then
  a:=X1:b:=X2:x0:=X2:i:=0:
  while (b-a)>=dx do
    x0:=`Колм_Ньют`(m, x0);
    b:=x0;
    a:=`hord`(PsK, m, a, b);
  end do:
  (a+b)/2
else
  'procname'(m, X1, X2, dx)
end if
end proc:
```

Приведенная процедура является ключевой для возможности построения графика, представленного на рис. 2:

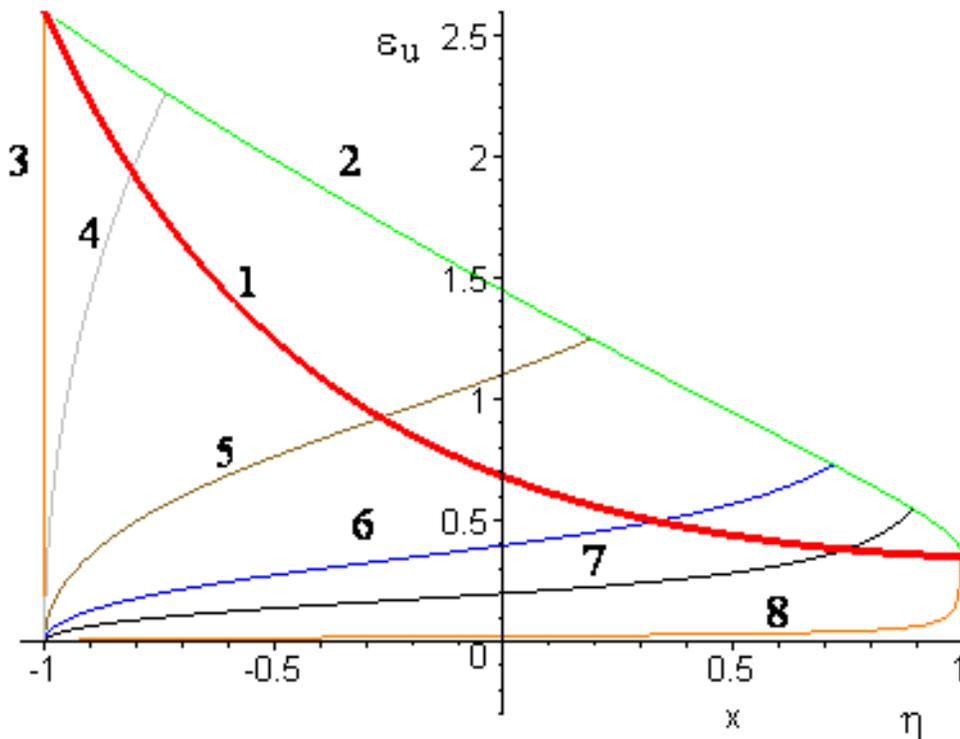


Рис. 2. Моделирование предельных деформаций при осевой осадке цилиндрических образцов, где: 1 – кривая предельных деформаций для стационарного деформирования; 2 – кривая предельных деформаций для сложного деформирования; 3÷8 – кривые, которые отображают пути деформирования с разными условиями трения на торцах: 3 – $m = 30$, 4 – $m = 2$, 5 – $m = 0,5$, 6 – $m = 0,18$, 7 – $m = 0,09$, 8 – $m = 0,01$

Длительность построения системой данного графика не превышает 20 с, что является полностью приемлемым. В то же время, необходимость применения вместо представления (1) моделей, которые базируются на нелинейном законе суммирования повреждений, в частности предложенному в [2], приведет к существенному увеличению количества вычислений. Это связано с тем, что под интегралом в соотношении (6) появляется величина, что сама представляется интегралом. Применение тензорных моделей [1] приведет к еще большему количеству вычислений. В результате может появиться необходимость совершенствования схемы, которая построена в данной работе. Заметим, что кривая предельных деформаций для условий сложного деформирования впервые построена в данной работе. Раньше такие кривые строили с помощью интерполяции и экстраполяции по 3÷5 точкам [2, 8].

Выводы

1. Построенная схема вычислений, которая базируется на применении комбинированного метода хорд и касательных. Сравнительно с применением стандартной команды системы Maple, это позволит повысить скорость построения графика, приведенного на рис. 2, в 60 раз, уменьшив длительность вычислений с 20 минут до 20 с.

2. Разработанная методика пригодна не только для рассмотренного процесса осадки цилиндрических образцов, но и для любых процессов, которые сопровождаются сложным деформированием.

3. Привлечение нелинейных и тензорных моделей накопления повреждений может вызывать необходимость совершенствования построенной схемы вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998. – 195 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении. – К.: УМК ВО, 1989. – 152 с.
3. Сивак И. О. Влияние немонотонности нагружения на пластичность при радиальном выдавливании с контурной осадкой // Науковий вісник Національної гірничої академії України. – 2001. – С. 47 – 50.
4. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 229 с.
5. Сопrotивление деформации и пластичность металлов при обработке давлением // Калпин Ю. Г., Перфилов В. И., Петров П. А., Рябов В. А., Филиппов Ю. К. – М.: «МАМИ», 2007. – 118 с.
6. Лебедев А. А., Михалевич В. М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Проблемы прочности. – 2003. – № 3. – С. 5 – 14.
7. Смирнов-Аляев Г. А. Сопrotивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов. – М.- Л.: Машгиз, 1961. – 463 с.
8. Мишулин А. А. Михалевич В. М. Тензорно-нелинейная модель накопления повреждений // Обработка металлов давлением. – Свердловск. – 1985. – С. 10 – 14.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. – 512 с.
10. Maple 9/ Advanced Programming Guide/M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S. M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. – Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. – 2003. – 443 p.

Михалевич Владимир Маркусович – д. т. н., профессор, заведующий кафедры прикладной математики.

Добранюк Юрий Владимирович – аспирант кафедры прикладной математики.

Михалевич Алексей Владимирович – студент группы 1БС-07.
Винницкий национальный технический университет.