УДК 338.5.0187

В. В. Гоцуленко, к. т. н., доц.; О. А. Поддубная

АНАЛИЗ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫХОДА НА ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Для одного класса нелинейных сосредоточенных динамических систем проведен их бифуркационный анализ и рассмотрена задача оптимального выхода на предельный цикл.

Ключевые слова: *бифуркация, аттрактор, бифуркационный параметр, предельный цикл, оптимальное управление.*

Введение и постановка задачи. В описании математической модели многих динамических систем участвуют величины, которые математически являются функциями времени и между которыми существуют сложные нелинейные зависимости, идентификация которых часто бывает фактически невозможной. Поэтому для детального анализа с целью прогнозирования таких систем следует из всего многообразия переменных выделять наиболее значимые и далее исследовать соотношения лишь между ними.

Так, в частности для условных замкнутых экономических систем в качестве основных переменных можно выделить: x – величина вложенного капитала, y – полученная прибыль. Предполагая, что режим динамики является почти установившимся (т. е. $t \to \infty$) и длительность цикла капиталообращения $\tau << t$, динамические переменные $x(t)$ и $y(t+\tau) = y(t) + O(\tau) \approx y(t)$ можно отнести к одному моменту времени t и тем самым изучать динамику в фазовой плоскости. Далее вполне естественно предположить существование функциональной связи $y = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ с некоторой гладкой функцией f. Действительно, полученная прибыль y зависит от величины вложенного капитала, но также и от тенденции его поступления (изменения) во времени, т. е. от $\frac{dx}{dt}$. По той же причине, рассматривая в некотором смысле обратную связь, получаем, что $x = g\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$ с некоторой гладкой функцией g.

Будем предполагать, что управляющим параметром в рассматриваемой экономической системе, а точнее в рассматриваемой математической модели, является цена. Идентификация функций f и g для конкретной рассматриваемой экономической системы является отдельной задачей, которая отчасти зависит от экспертных знаний о структуре рассматриваемой системы. Однако, как показано в ряде работ [4, 7 – 8], довольно широкий класс задач охвачен, когда функции f и g представлены в следующей аддитивной форме: $f(t_1, t_2) = H(t_1) + \sigma(t_2)$ и $g(t_1, t_2) = \varphi(t_1) + \theta(t_2)$. Мы далее еще более конкретизируем ситуацию, полагая, что $\sigma(t_2) = \sigma_{cp} \cdot t$ и $\theta(t_2) = \theta_{cp} \cdot t_2$. Тогда окончательно приходим к следующей динамической системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha \cdot (H(x) - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta \cdot (x - \varphi(y)), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_{cp} = -\frac{1}{\alpha}$ и $\theta_{cp} = \frac{1}{\beta}$.

Отметим, что участвующие в формировании системы (1) функции H и φ имеют ясный экономический смысл [8] и часто называются характеристиками.

Бифуркационный анализ. Математическое моделирование различных вопросов естествознания часто приводит к изучению систем дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Такое изучение начинается обычно с нахождения неподвижных точек (стационарных решений) в их зависимости от параметров и по мере возможности обнаружения периодических режимов. Обнаружение бифуркации рождения цикла [1, 3 – 4] (т. е. бифуркации Хопфа) – один из этапов этого исследования.

Ниже рассматривается вопрос возникновения бифуркации рождения цикла в динамической системе (1), когда ее характеристики явно зависят от управляющего параметра цены p:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot \left(H(x,p) - y\right), \\ \frac{dy}{dt} = \beta \cdot \left(x - \varphi(y,p)\right), \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta = const > 0$ и p – параметр бифуркации.

Относительно системы (2) предполагаем следующее: $\begin{cases} H(\xi,p) = y_o \\ \varphi(y_o,p) = \xi \end{cases}$ при любом p из некоторого интервала I_{p_o}, (ξ, y_o) – изолированная неподвижная точка системы, функции $H(x,p)$ и $\varphi(y,p)$ аналитические на множествах $I_\xi \times I_{p_o}$ и $I_{y_o} \times I_{p_o}$ соответственно.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $\alpha \frac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x} = \beta \frac{\partial \varphi(y_o,p_o)}{\partial y}$;

2) $\alpha \frac{\partial^2 H(\xi,p_o)}{\partial x \partial p} \neq \beta \frac{\partial^2 \varphi(y_o,p_o)}{\partial y \partial p}$;

3) $\left|\frac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x}\right| < \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ или $\left|\frac{\partial \varphi(y_o,p_o)}{\partial y}\right| < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Тогда $\exists$ число $\varepsilon_{Hopf} > 0$ и аналитическая функция $\mu_{Hopf}(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{Hopf}$, такая, что $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_{Hopf})$ система (2) имеет при $p = p_{Hopf}(\varepsilon)$ аналитическое периодическое решение $[x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)]$, с периодом $T_{Hopf}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_o}\left\{1 + \sum_{j=2}^{\infty} \tau_j \varepsilon^j\right\}$, где $\omega_o = \sqrt{\alpha\beta - \frac{1}{4}\left(\alpha \frac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi(y_o,p_o)}{\partial y}\right)^2}$.

Более того, для каждого $L > \frac{2\pi}{\omega_o}$ существует окрестность $\Re$ точки (ξ, y_o) и интервал $\widetilde{I} \ni p_o$, такие, что для каждого значения цены $p \in \widetilde{I}$ единственными непостоянными периодическими решениями системы (2), лежащими в $\Re$ и имеющими период меньший L, являются члены семейства $[x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)]$, для которых $p_{Hopf}(\varepsilon) = p$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{Hopf})$.

Доказательство. Предположим $\Omega = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \left(H(x,p) - y\right), \\ \beta \cdot \left(x - \varphi(y,p)\right) \end{bmatrix}$, тогда матрица Якоби этого вектора имеет вид: $\dfrac{\partial\Omega}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \alpha\dfrac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x} & -\alpha \\ \beta & -\beta\dfrac{\partial\varphi(y_o,p_o)}{\partial y} \end{bmatrix}$.

Пусть $\lambda(p)$ и $\overline{\lambda}(p)$ корни характеристического уравнения:

$$\det\left[\frac{\partial\Omega}{\partial(x,y)} - \lambda E\right] = 0,$$

тогда элементарно проверяется, что:

$$\mathrm{Re}\lambda(p) = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial x} - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \text{ и } \mathrm{Im}\lambda(p) = \sqrt{\alpha\beta - \frac{1}{4}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Далее из теоремы Хопфа [1], следует, что для доказательства нашей теоремы достаточно доказать, что:

$$\mathrm{Re}\lambda(p_o) = 0,\ \frac{d}{dp}\mathrm{Re}\lambda(p_o) \neq 0 \text{ и } \omega_o \overset{def}{=} \mathrm{Re}\lambda(p_o) > 0.$$

Но из 1) автоматически следует, что $\mathrm{Re}\lambda(p_o) = 0$, а поскольку

$$\frac{d}{dp}\mathrm{Re}\lambda(p_o) = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial^2 H(\xi,p_o)}{\partial x\partial p} - \beta\frac{\partial^2\varphi(y_o,p_o)}{\partial y\partial p}\right),$$

то из условия 2) следует, что $\dfrac{d}{dp}\mathrm{Re}\lambda(p_o) \neq 0$. Теперь из условий 1) и 3) следует, что $\mathrm{Im}\lambda(p_o) > 0$. Действительно, пусть, например $\left|\dfrac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x}\right| < \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, тогда имеем: $\{\mathrm{Im}\lambda(p_o)\}^2 = \alpha\beta - \dfrac{1}{4}\left(\alpha\dfrac{\partial H}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 =$

$= \alpha\beta - \alpha^2\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2 > \alpha\beta - \alpha^2\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, что и требовалось доказать. Следовательно, теорема доказана.

Далее, как обосновывается в работах [4, 7], воспользуемся следующими аппроксимациями (рис. 1), приближая функцию $H(x,p)$ полиномом 3-й степени, а также предполагая, что $\varphi(y,p) = k\cdot\sqrt{y}$. В связи с этим нам понадобится следствие доказанной теоремы, приведенный ниже.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0 < b < a$, $\Psi_{a,b}(x) = x\cdot(x-a)(x-b)$, $h_p(x) = \gamma(p)\cdot\Psi_{a,b}(x)$, $H(x,p) = h_p(x) - h_p(\xi) + y_o$, $\varphi(y,p) = \xi\cdot\sqrt{\dfrac{y}{y_o}}$, $\xi \notin \{0,a,b\}$, $\dfrac{d\gamma(p_o)}{dp} \neq 0$, $\gamma(\mu_o)\cdot\Psi_{a,b}(\xi) < 2\dfrac{y_o}{\xi}$.

Тогда, если $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\xi}{y_o}\gamma(p_o)\cdot\Psi_{a,b}(\xi)$, то $\exists\ p \approx p_o$, при котором (2) имеет периодическое решение.

Характер перестройки фазового портрета системы (2) при варьировании параметра бифуркации p, а также равновесных значений вложенного капитала ξ представлен на рисунке 2. Соответствующая динамика в расширенном фазовом пространстве представлена на рисунке 3.

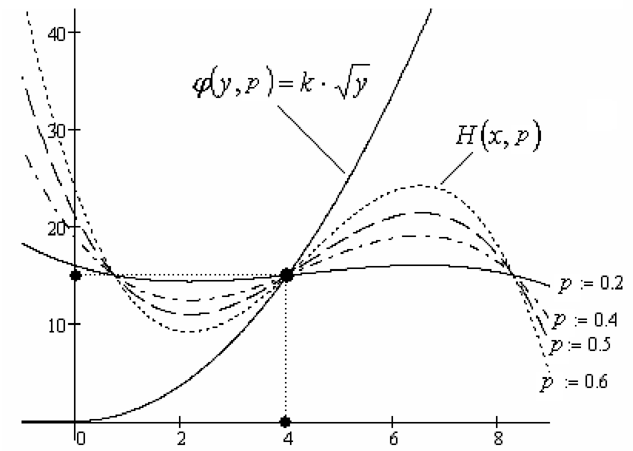

Рис. 1. Деформации характеристик H и φ при изменении цены p как параметра бифуркации

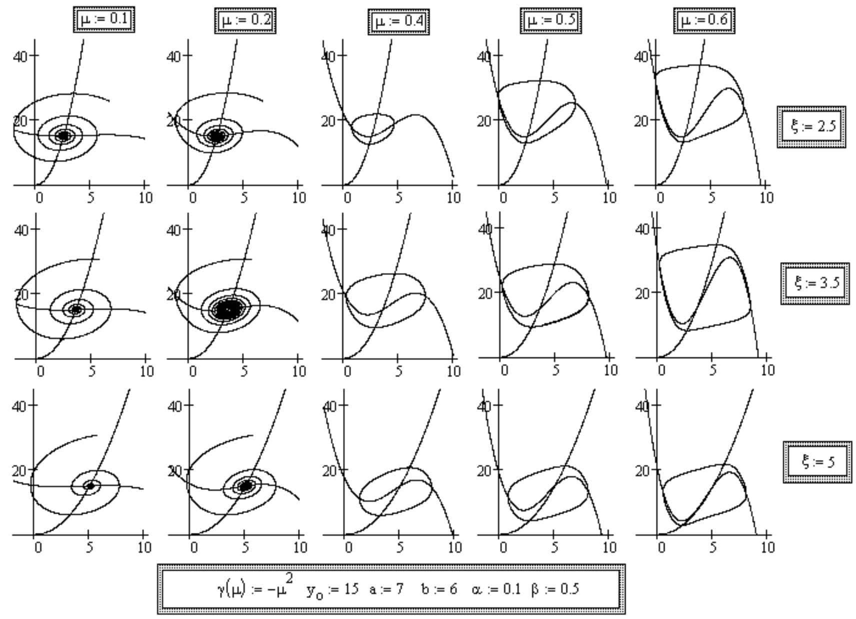

Рис. 2. Иллюстрация бифуркации Хопфа в фазовом пространстве системы (2)

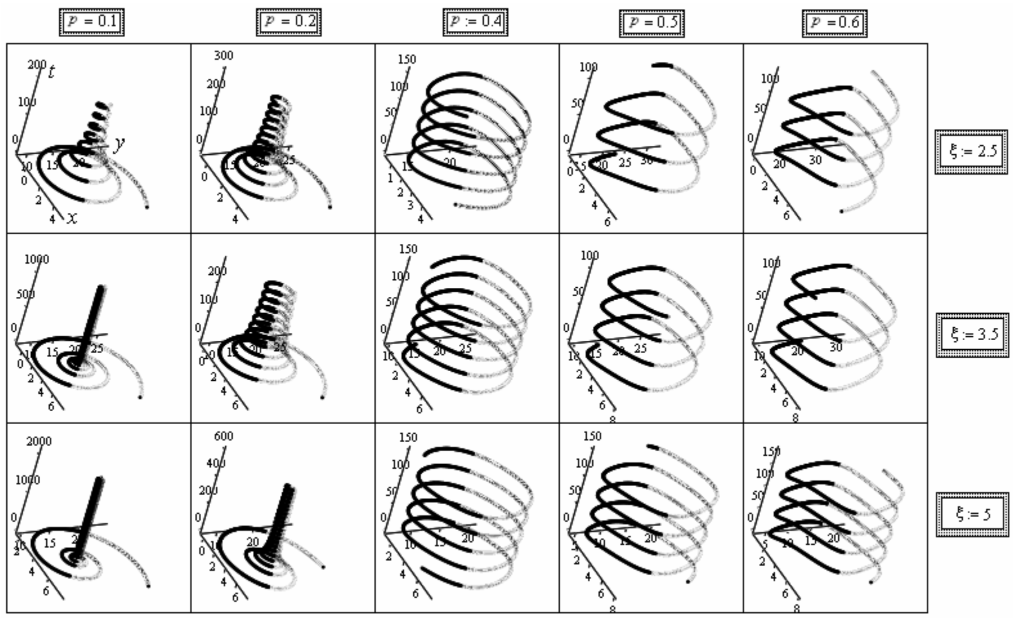

Рис. 3. Иллюстрация бифуркации Хопфа в расширенном фазовом пространстве

Анализ задачи управления. Как известно [1, 3 – 4], аттракторы диссипативных динамических систем описывают их динамику на установившемся режиме, т. е. любая фазовая траектория, начинающаяся в бассейне притяжения аттрактора, с течением времени неограниченно к нему приближается, или, как говорят условно, выходит на аттрактор. На практике все системы являются диссипативными. С позиций экономики важна стабильность динамики, а все переходные процессы являются лишь промежуточными этапами. Поэтому задача минимизации времени выхода на аттрактор (т. е. времени переходного режима) при заданных начальных условиях является актуальной. При этом, как правило, в качестве управляющих параметров выступают величины, связанные с ресурсами системы. В нашем случае в качестве управляющего параметра рассматривается цена p, а в качестве функционала качества рассматривается время минимизации выхода на предельный цикл системы (2) при заданных начальных условиях. Множество допустимых управлений U^{∂} определяется следующим образом:

$$U^{\partial} = \{p \in KC[t_0, t_1] : p_{\min} \le p(t) \le p_{\max} \ \ \forall t \in [t_0, t_1]\}, \tag{3}$$

где через $KC[t_0, t_1]$ обозначено множество всех кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, причем концы отрезка не фиксируются.

Как следует из принципа максимума Понтрягина [2], оптимальные управления являются кусочно-постоянными функциями. Поэтому, введя в рассмотрение класс управлений

$$U^{\partial}[p_0, \varepsilon, T, \varphi_0] = \{p(t) = p_0 + \varepsilon \operatorname{sgn}[\sin(T \cdot t + \varphi_0)]\} \subset U^{\partial}, \tag{4}$$

получим, что для оптимального управления $\tilde{p}(t)$ найдутся такие значения $p_0, \varepsilon, T, \varphi_0$, что справедливо включение $\tilde{p}(t) \in U^{\partial}[p_0, \varepsilon, T, \varphi_0]$.

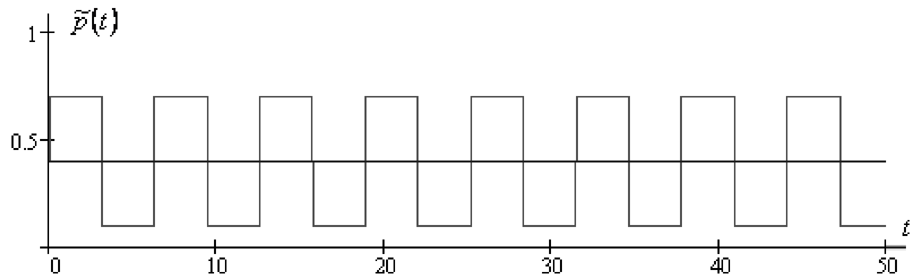

Рис. 4. Зависимость оптимального управления при $p_o = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 1$, $\varphi_0 = 0$

Результат численного интегрирования системы уравнений (2) при оптимальной стратегии цены $\widetilde{p}(t)$ (рис. 4) изображен на рисунке 5.

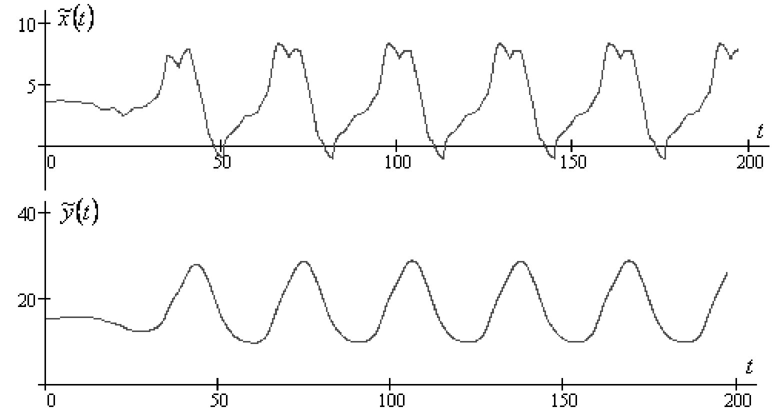

Рис. 5. Зависимость во времени оптимальных траекторий $\widetilde{x}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$

Выводы. Проведенный анализ в рамках рассматриваемой математической модели показывает, что при оптимальной стратегии управления ценой функции капиталовложений и прибыли колеблются синхронно с одинаковыми частотами, однако характер капиталовложений менее гладкий и имеет в области максимума всплески. Интересным является тот факт, что при оптимальной стратегии функции прибыли на соответствующей стратегии капиталовложений расположены участки с отрицательными капиталами, которые, например, можно интерпретировать как дополнительную прибыль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хессард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложение бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
4. Д. Эрроумсмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1986. – 240 с.
5. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
6. Гоцуленко В.В., Самохвалов Т.С. Об одном классе стратегий капиталовложений в замкнутой экономической системе // Международная научная конференция "Ломоносовские чтения 2004". – Севастополь: Изд-во Черноморского филиала МГУ, 2004. – С. 9.
7. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Об одном классе экономических систем обладающих предельным циклом // Міжнародна науково - практична конференція “Розвиток економіки в трансформаційний період: глобальний та національний аспекти”. – Дніпропетровськ, 2005 р. – С. 72-73.
8. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Повышение эффективности деятельности торгового предприятия оптимальным выбором цены как функции времени // Вестник Национального технического университета “ХПИ”. 2006. № 39. – С. 81 – 85.

Гоцуленко Владимир Владимирович – к. т. н., доцент, кафедра экономической кибернетики, e-mail: gosul@ukr.net, тел. 80667807710.

Поддубная Ольга Александровна – ст. преподаватель, кафедра экономической кибернетики, тел. (05652) 2-75-86.

г. Желтые Воды, институт предпринимательства "Стратегия".