УДК 531.7.08

Ю. Г. Ведмицкий

СИСТЕМА ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ, ЕГО ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА

В работе развита теория измерительного преобразования момента инерции механических и электромеханических систем. Введено понятие обобщенного преобразователя момента инерции, сформулированы и обоснованы его признаки и свойства, а также приведена математическая модель.

Ключевые слова: *момент инерции, измерительное преобразование, математическая модель, обобщенные координаты, уравнения Лагранжа.*

1. Введение

Обзор современного состояния измерительных преобразователей момента инерции и анализ их теоретического обеспечения [1] свидетельствует об отсутствии на сегодня *единых* подходов как в разработке методов измерения момента инерции, так и в создании их математических моделей.

Более того, поскольку по своему строению научная теория должна представлять собой целостную и внутренне дифференцированную систему иерархически взаимосвязанных, обобщающих, логически совместимых понятий, законов и положений, существуют все предпосылки утверждать, что как система обобщающих положений *теория преобразователей момента инерции на сегодня пребывает еще в незавершенном состоянии и требует своего дальнейшего развития*.

В работах [1 – 6] приведены обобщенные математические модели преобразователей момента инерции с одной (1-го и 2-го порядков) и двумя (3-го порядка) степенями свободы. Это позволило систематизировать известные преобразователи и методы преобразования момента инерции и создало необходимые предпосылки для разработки новых методов преобразования с улучшенными метрологическими характеристиками. Однако нерешенными остались такие вопросы.

Во-первых, не разработана математическая модель обобщенного преобразователя момента инерции произвольного порядка (с n степенями свободы), что должно быть логическим завершением самого процесса обобщения.

Во-вторых, в основание известных математических моделей преобразователей момента инерции были положены уравнения Лагранжа второго рода. Однако, это было сделано аксиоматично, без надлежащего теоретического обоснования.

В-третьих, созданные математические модели ограничивались исключительно механическими системами, оставляя без внимания системы электромеханические.

Приведенные вопросы достаточно важны и их решение становится возможным благодаря введению абстрактного измерительного устройства – *обобщенного преобразователя момента инерции* (ОПМИ) [7, 8]. По мнению автора, это позволяет заложить общие теоретические основы процесса преобразования момента инерции и *частично* решить проблему отсутствия общей теории преобразователей момента инерции.

Во время теоретического исследования механической и электромеханической систем ОПМИ путем математического моделирования с помощью вариационных принципов аналитической механики получены их математические модели, которым также присущий признак обобщенности. В связи с этим возникает возможность определить фундаментальные признаки и свойства системы ОПМИ, а значит, сформулировать и теоретически обосновать основные общие закономерности, присущие процессу преобразования момента инерции.

2. Обобщенный преобразователь момента инерции

Обобщенным преобразователем момента инерции *назовем абстрактное измерительное устройство произвольного порядка (с n степенями свободы), который реализует измерительное* *преобразование момента инерции в математически с ним связанную физическую величину (геометрическую, кинематическую или динамическую), есть самой общей формой относительно известных и возможных в будущем преобразователей момента инерции и при отдельных условиях преобразуется в них.*

Структурная схема обобщенного преобразователя момента инерции приведена на рис. 1.

В общем случае это устройство представляет собой исключительно механическую или электромеханическую систему и состоит из *двух взаимодействующих* частей (подсистем):

– самого объекта измерения (контроля), который по своей природе есть или механической, или электромеханической системой (назовем эту часть подсистемой А). По условию задачи момент инерции J_{OB} подсистемы А неизвестен и представляет собой входную физическую величину;

– некоторой дополнительной исключительно механической системы с наперед заданными свойствами и связями (подсистема В), которая определенным образом связана с объектом измерения (контроля) и создает для него или поле активных сил, побуждая к движению, или поле реакций связей, ограничивая это движение. Таким образом, как и подсистема А, подсистема В определяет состояние преобразователя и оказывает влияние на его уравнения движения.

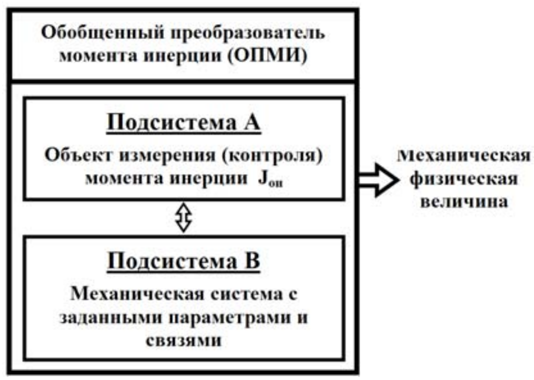

Рис. 1. Структурная схема обобщенного преобразователя момента инерции

3. Математическая модель механической системы ОПМИ

Математической моделью обобщенного преобразователя момента инерции должны быть *уравнения движения* самого преобразователя как механической (электромеханической) системы, записанные в той или иной форме, поскольку обязательно явно или неявно в системе уравнений будут присутствовать и момент инерции как входная величина, так и другая механическая физическая величина, которая принята за выходную.

В свою очередь, системой уравнений движения ОПМИ есть совокупность систем уравнений движения подсистемы А и подсистемы В, если только эти дифференциальные уравнения получены с учетом силового взаимодействия между означенными подсистемами.

Таким образом, рассмотрим движение каждой из подсистем ОПМИ в отдельности.

Движение подсистемы А

Пусть подсистема А содержит N_A материальных точек с массами m_i, где $i = 1, 2, ..., N_A$.

Во время движения этой подсистемы в общем случае к каждой ее i-ой материальной точке приложена совокупность уравновешенных сил [9] (рис. 2):

$$\vec{F}_i^{(A)} + \vec{R}_i^{(A)} + \vec{P}_i^{(AB)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)} = 0,$$

где $\vec{F}_i^{(A)}$ – сила, которая представляет собой равнодействующую совокупности активных сил, приложенных к произвольной i-ой материальной точке подсистемы А; $\vec{R}_i^{(A)}$ – сила, которая ограничивала бы движение i-ой материальной точки подсистемы А при условии независимости последней от подсистемы В (равнодействующая реакций связей собственно подсистемы А); $\vec{P}_i^{(AB)}$ – равнодействующая активных сил и реакций связей, которые побуждают к движению либо, наоборот, ограничивают движение i-ой материальной точки подсистемы А вследствие силового воздействия со стороны подсистемы В; $-m_i\ddot{\vec{r}}_i^{(A)}$ – сила инерции Даламбера, что воздействует на каждую i-ую материальную точку с массой m_i, где $\vec{r}_i^{(A)}$ – радиус-вектор i-oї материальной точки относительно заданной системы отсчета.

Согласно *принципу Даламбера-Лагранжа* [9]:

$$\sum_{i=1}^{N_A}\left(\vec{F}_i^{(A)}+\vec{R}_i^{(A)}+\vec{P}_i^{(AB)}-m_i\ddot{\vec{r}}_i^{(A)}\right)\cdot\delta\vec{r}_i^{(A)}=0\,. \qquad (1)$$

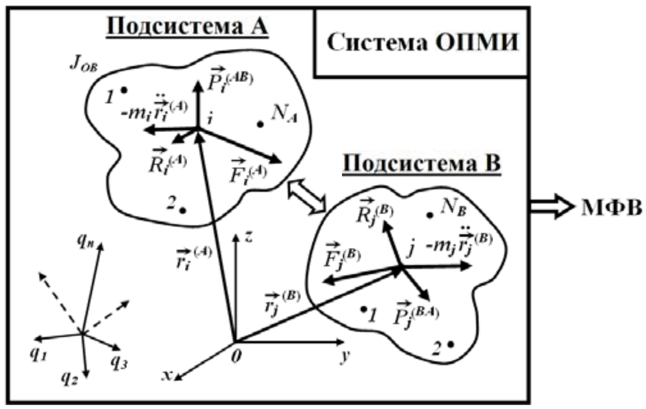

Рис. 2. Распределение сил в системе ОПМИ

Подробные математические преобразования приведены в работе [7]. Ссылаясь на них, общее уравнение динамики движения подсистемы А (1) можно переписать в обобщенных координатах q_s :

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s^{(A)}+\sum_{i=1}^{N_A}\vec{P}_i^{(AB)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial\dot{q}_s}\right)+\frac{\partial T_A}{\partial q_s}\right)\cdot\delta q_s=0$$

или, учитывая независимость их вариаций –

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T_A}{\partial q_s}=Q_s^{(A)}+\sum_{i=1}^{N_A}\vec{P}_i^{(AB)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s},\qquad s=1,2,...,n\,, \qquad (2)$$

где T_A – кинетическая энергия подсистемы А; $Q_s^{(A)}=\sum_{i=1}^{N_A}\vec{F}_i^{(A)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s}$ – обобщенная сила, которая действует на все точки подсистемы А и соответствует *s*-ой обобщенной координате.

Движение подсистемы В

Уравнения движения подсистемы В ОПМИ получим на основании принципа Даламбера-Лагранжа аналогичным образом. Тогда для подсистемы В ОПМИ можно записать:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s^{(B)}+\sum_{j=1}^{N_B}\vec{P}_j^{(BA)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s},\qquad s=1,2,...,n\,, \qquad (3)$$

где T_B – кинетическая энергия подсистемы В; $Q_s^{(B)}=\sum_{j=1}^{N_B}\vec{F}_i^{(B)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s}$ – обобщенная сила подсистемы В, что соответствует *s*-ой обобщенной координате.

Уравнение движения системы ОПМИ

Поскольку дифференциальные уравнения подсистем А и В были получены с учетом силового взаимодействия между ними, то для получения системы уравнений движения ОПМИ покоординатно сложим между собой уравнения систем (2) и (3), учтя при этом *теорему о действии и противодействии подсистем А и В в обобщенных силах*. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}T_A\left(J_{OB}\right)\right]+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial q_s}T_A\left(J_{OB}\right)+\frac{\partial T_B}{\partial q_s}\right]=Q_s^{(A)}+Q_s^{(B)},\quad s=1,2,...,n. \qquad (4)$$

Система уравнений движения ОПМИ (8) являет собой систему n дифференциальных уравнений *второго порядка* относительно обобщенных координат, которая представлена в форме *уравнений Лагранжа второго рода* [9]. Она есть обобщенной математической моделью любого *теоретически возможного* преобразователя момента инерции.

Математическая модель механической системы ОПМИ

Движению системы ОПМИ свойственны некоторые особенности, которые позволяют упростить систему уравнений (4). Их основательный анализ проведен в работах [7, 8]. На основании результатов этого анализа система уравнений (4) может быть представлена в таком виде:

$$\begin{cases}\left(J_{OB}+m_A l^2\right)\ddot{q}_1=M_A-\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s-\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_s}-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s},\ s=2,3,...,n,\end{cases} \qquad (5)$$

В математической модели (5) Π – потенциальная энергия системы ОПМИ; Φ – диссипативная функция Релея; M_A – главный механический момент сил подсистемы А относительно ее оси вращения.

4. Теоремы взаимодействия подсистем А та В ОПМИ

Во время аналитического исследования движения системы ОПМИ нельзя оставить без внимания некоторые важные общие закономерности, которые присущи любым ныне известным, а также возможным в будущем преобразователям момента инерции. Назовем эти закономерности *теоремами взаимодействия*. Сформулируем их и теоретически обоснуем.

Итак, пусть подсистема А пребывает в силовом поле действия подсистемы В.

Это означает, что, в общем случае, на каждую i-ую из N_A материальных точек подсистемы А со стороны каждой j-ой из N_B материальных точек, которые принадлежат подсистеме В, действует совокупность активных сил и реакций связей (рис. 3).

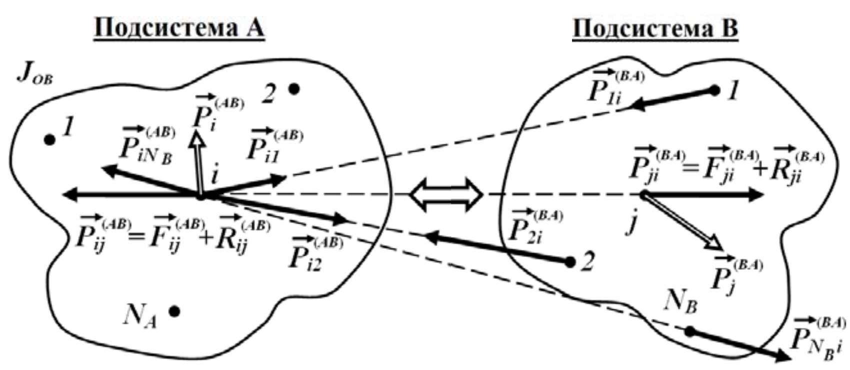

Рис. 3. Поле взаимных сил подсистем А и В ОПМИ

На рис. 3 сила $\vec{F}_{ij}^{(AB)}$ – активная, а сила $\vec{R}_{ij}^{(AB)}$ – реакция связей, которые в совокупности действуют на произвольную i-ую точку подсистемы А со стороны некоторой j-ой точки подсистемы В

$$\vec{P}_{ij}^{(AB)}=\vec{F}_{ij}^{(AB)}+\vec{R}_{ij}^{(AB)}.$$

С другой стороны, в общем случае, каждая i-ая из N_A материальных точек подсистемы А действует на каждую j-ую из N_B материальных точек, которые принадлежат подсистеме В, с силой

$$\vec{P}_{ji}^{(BA)} = \vec{F}_{ji}^{(BA)} + \vec{R}_{ji}^{(BA)}.$$

Соответственно *закону равности действия и противодействия* [9] $\vec{P}_{ij}^{(AB)} = -\vec{P}_{ji}^{(BA)}$, то есть во время движения подсистемы А в силовому поле подсистемы В всегда существует пара сил $\vec{P}_{ij}^{(AB)}$, $\vec{P}_{ji}^{(BA)}$ таких, что их сума

$$\vec{P}_{ij}^{(AB)} + \vec{P}_{ji}^{(BA)} = 0. \tag{6}$$

Равенство (6) позволяет сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. **<u>О действии и противодействии подсистем А и В ОПМИ</u>**

Действие всегда соответствует равному ему и противоположенному по направлению противодействию, то есть

действие подсистемы А ОПМИ на подсистему В порождает противодействие, равное по величине и противоположенное по направлению:

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N_A}} \vec{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{AB})} + \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{N_B}} \vec{\mathbf{P}}_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{BA})} = \mathbf{0}$$

или

$$\vec{\mathbf{P}}^{(\mathbf{AB})} + \vec{\mathbf{P}}^{(\mathbf{BA})} = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Силовым *действием* на подсистему А со стороны подсистемы В назовём сумму $\vec{P}^{(AB)} = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)}$, где сила $\vec{P}_i^{(AB)} = \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_{ij}^{(AB)}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к i-ой точке подсистемы А со стороны *всех* N_B точек подсистемы В. Тогда *противодействие* подсистемы А действию подсистемы В представляет собой действие подсистемы А на подсистему В $\vec{P}^{(BA)} = \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)}$, где сила $\vec{P}_j^{(BA)} = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_{ji}^{(BA)}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к j-ой точке подсистемы В вследствие действия со стороны всех N_A точек, что принадлежат подсистеме А.

Для действия на подсистему А со стороны подсистемы В, учтя при этом соотношение (6) и изменивши порядок суммирования, можно записать:

$$\vec{P}^{(AB)} = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_{ij}^{(AB)} = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} \left(-\vec{P}_{ji}^{(BA)}\right) = -\sum_{j=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_{ji}^{(BA)} = -\sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} = -\vec{P}^{(BA)}$$

или

$$\vec{P}^{(AB)} + \vec{P}^{(BA)} = 0.$$

Что и необходимо было доказать.

Теорема 2. **<u>Об эквивалентности взаимодействия подсистем А и В ОПМИ</u>**

Важным следствием теоремы о действии и противодействии подсистем А та В есть то, что

движение подсистем А и В во внешнем силовом поле, созданном подсистемой В, будет эквивалентным движению подсистем А и В во внешнем силовом поле, созданном подсистемой А, если только эти поля будут представлять собой действие и противодействие.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Следствие (теорема) вытекает из свойства *коммутативности* действия суммирования в равенстве (7).

Теорема 3. **О действии и противодействии подсистем А и В ОПМИ в обобщенных силах**

Действие в обобщенных силах всегда соответствует равному ему и противоположенному по знаку противодействию, то есть

обобщенное действие относительно любой обобщенной координаты одной материальной системы на другую всегда порождает по этой же координате обобщенное противодействие, равное по величине и противоположное по знаку:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} + \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \frac{\partial \vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$D_s^{(AB)} + D_s^{(BA)} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Обобщенным действием по s-ой обобщенной координате на подсистему А со стороны подсистемы В назовем обобщенную силу $D_s^{(AB)} = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s}$, а *обобщенным противодействием* по этой же координате подсистемы А действию системы В – обобщенную силу $D_s^{(BA)} = \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \frac{\partial \vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s}$.

Возможная работа $\delta A^{(AB)}$ всех сил $\vec{P}_i^{(AB)}$, которые приложены к точкам подсистемы А вследствие действия со стороны подсистемы В, равна:

$$\delta A^{(AB)}\left(\vec{P}_i^{(AB)}\right) = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \delta \vec{r}_i^{(A)}.$$

Перепишем это равенство, учтя, что вариация радиус-вектора

$$\delta \vec{r}_i^{(A)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \delta q_s,$$

и изменим порядок суммирования. Тогда

$$\delta A^{(AB)}\left(\vec{P}_i^{(AB)}\right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) \delta q_s. \tag{8}$$

С другой стороны, возможная работа $\delta A^{(BA)}$ всех сил $\vec{P}_j^{(BA)}$, приложенных к точкам подсистемы В вследствие действия со стороны этой подсистемы на подсистему А, равняется:

$$\delta A^{(BA)}\left(\vec{P}_j^{(BA)}\right) = \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \delta \vec{r}_j^{(B)} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \frac{\partial \vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s} \right) \delta q_s. \tag{9}$$

На основании закона *сохранения энергии* [9]

$$\delta A^{(AB)}\left(\vec{P}_i^{(AB)}\right) = -\delta A^{(BA)}\left(\vec{P}_j^{(BA)}\right). \tag{10}$$

Тогда в совокупности из соотношений (8) – (10) следует:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} + \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \frac{\partial \vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s} \right) \delta q_s = 0.$$

Поскольку все вариации обобщенных координат независимы между собой вследствие независимости самих обобщенных координат, то вышеприведенная сумма будет равняться нулю, если только будут равны нулю множители при всех вариациях δq_s

$$\sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} + \sum_{j=1}^{N_B} \vec{P}_j^{(BA)} \frac{\partial \vec{r}_j^{(B)}}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1,2,...,n$$

или

$$D_s^{(AB)} + D_s^{(BA)} = 0, \quad s = 1,2,...,n.$$

Теорема доказана.

5. Математическая модель электромеханической системы ОПМИ

В случае, если подсистема А будет *электромеханической*, то ее движение, как и движение системы ОПМИ в целом, определяется действием и взаимодействием не только механических сил, но и сил *электромагнитного* происхождения [9, 10], что приведет к увеличению количества независимых переменных, которые однозначно описывают состояние и движение электромеханической системы ОПМИ.

В этом случае, как было доказано в роботе [7], математическая модель электромеханической системы ОПМИ примет вид:

$$\begin{cases} \left(J_{OB} + m_A l^2\right)\ddot{q}_1 = M_A - \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial T_B}{\partial q_s} = Q_s - \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_s} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = 2,3,...,n. \end{cases} \tag{11}$$

где $M_A = M_A^{(м)} + M_A^{(e)}$. В системе дифференциальных уравнений (11) вращающий момент подсистемы А $M_A^{(e)}$ математически связан с обобщенными электрическими координатами $q_{n+1}^{(e)}, q_{n+2}^{(e)}, ..., q_k^{(e)}$ и контурными токами $i_{n+1}, i_{n+2}, ..., i_k$ и, в общем случае, зависит от времени t.

6. Два общих свойства преобразования момента инерции

Анализ математических моделей системы ОПМИ (5) и (11) обнаруживает два важных свойства любого преобразователя момента инерции, известного или возможного.

а) Так, структура систем дифференциальных уравнений (5) и (11), возможность их математического решения позволяет сделать следующее предположение, которое не вступает в противоречие ни с одним из существующих преобразователей момента инерции и которое представим в виде следующей **аксиомы**:

прямое измерительное преобразование момента инерции в физическую величину немеханического происхождения или теоретически невозможно (для механической системы ОПМИ), или же практически нецелесообразно (для электромеханической системы ОПМИ).

Важным следствием приведенной аксиомы есть то, что для преобразования момента инерции, например, в электрическую величину возникает необходимость строить *измерительные каналы* момента инерции с двумя и более преобразователями, первым из которых должен быть ОПМИ.

б) Из математических моделей (5) и (11) также следует *фундаментальное свойство* любого из существующих или возможных преобразователей момента инерции, которое сформулируем как теорему и докажем ее.

Теорема 4. **О динамическом режиме подсистемы А**

Любое преобразование момента инерции требует переходного процесса для объекта измерения (контроля) и возможно только при этом условии.

Доказательство.

Теорему докажем от противоположного.

Предположим, что преобразование момента инерции возможно при условии отсутствия переходного процесса в подсистеме А системы ОПМИ. Это значит, что подсистема А должна находиться или в состоянии покоя $q_1 = const$, или в состоянии равномерного движения $q_1 = c_1 t + c_2$, где c_1 и c_2 – постоянные.

В обоих случаях ускорение подсистемы А будет отсутствовать и вторая производная от первой обобщенной координаты по времени равняется нулю

$$\ddot{q}_1 = 0\,. \tag{12}$$

Так как, кроме первого, во все другие уравнения систем (5) и (11) момент инерции J_{OB} не входить ни явно, ни опосредованно (неявно), то равенство (12) лишает все возможные решения систем (5) и (11) зависимости от момента инерции, а так, и *делает невозможным его преобразование*.

Предположение привело к противоречию, а потому есть ложным (*закон непротиворечия*).

Теорему доказано.

7. Выводы

В работе развиты теоретические положения процесса измерительного преобразования момента инерции механических и электромеханических систем. Предложено понятие обобщенного преобразователя момента инерции (ОПМИ), который представляет собой абстрактную наиболее общую форму относительно существующих и возможных в будущем преобразователей момента инерции. Это позволило сформировать общую структурную схему и на основании вариационных принципов аналитической механики разработать обобщенную математическую модель, а также обнаружить и обосновать важные признаки и свойства как системы ОПМИ, так и самого процесса преобразования момента инерции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. До питання розв'язку проблеми систематизації математичних моделей і методів перетворення моменту інерції. Огляд та перспектива // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – 2006. – Випуск 3/2006(38). – Частина 1. – С. 130 - 133.
2. Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Рівняння Лагранжа як основа теорії перетворювачів моменту інерції // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – 2005. – №3(32). – С. 89 – 91.
3. Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г. Теорія динамічних аналогій у перетворенні моменту інерції тіл обертання та електричні моделі існуючих і можливих вимірювальних перетворювачів // Вісник Хмельницького національного університету . – 2005. – №4. – Ч. 1. Т.1 (68). – С. 122 – 128.
4. Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г. Математичні і електричні моделі перетворювача моменту інерції з двома ступенями вільності // Матеріали VIII міжнародної конференції КУСС-2005. – Вінниця. – С. 69.
5. Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г. Нові методи вимірювання моменту інерції в задачах автоматичного управління технічними системами // Матеріали XIII міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006). – Вінниця. – С. 173.
6. Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Узагальнена математична модель просторово-оптичного перетворення кутової швидкості та моменту інерції в задачах аналізу та синтезу // Вісник ВПІ. – №4(73). – 2007. – С. 7 – 14.
7. Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Узагальнений перетворювач моменту інерції // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету ім. Михайла Остроградського. – 2008. – Випуск 3/2008 (50). – Частина 1. – С.113 - 118.
8. Ведміцький Ю. Г. Вимірювальне перетворення і контроль моменту інерції механічних та електромеханічних систем в процесі їх експлуатації. Теорія і практика // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – №4. – С. 47 – 55.
9. Павловський М. А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
10. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Нелинейная электромеханика. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.

Ведмицкий Юрий Григорьевич – ассистент кафедры теоретической электротехники и электрических измерений e-mail: wjg@ukr.net, тел. (0432)-59-84-44.

Винницкий национальный технический университет.