

УДК 681.7.068:004.7

**В. П. Кожемяко, д. т. н., проф.; В. И. Малиновский****МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В  
ГЕОИНФОРМАЦИОННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СЕТЯХ**

*В статье предложена математическая модель распределения потоков для геоинформационно-энергетических сетей (ГИЭС) на основе теории массового обслуживания. Проведено компьютерное моделирование динамики изменений вероятностей информационных и энергетических запросов в среде MathCad. Данная модель позволяет определять основные характеристики ГИЭС и описывает процессы распределения информационной и энергетической составляющих, что является перспективным в задачах разработки топологии сетей.*

**Ключевые слова:** геоинформационно-энергетическая сеть (ГИЭС), поток запросов, загрузка сети, информационно-энергетический канал, функция распределения вероятности.

**Введение**

Геоинформационно-энергетические сети (ГИЭС) [1, 2] – это современные высокотехнологические комплексные аппаратно-программные решения, предусматривающие анализ, обработку и принятие решений как в информационной, так и в энергетической сферах, оптимальное управление и перераспределение информационных и энергетических пространственно (географически) разнесенных ресурсов, обеспечивающиеся интеллектуальными системами, расположенными в локальных центрах управления. Информация и энергия при этом рассматривается в общем информационно-энергетическом поле [1].

**Постановка задачи**

При разработке и исследованиях топологий геоинформационно-энергетических сетей возникают задачи определения основных характеристик базовых узлов сети: пропускных способностей узлов и каналов передачи, среднего числа абонентов, необходимого быстродействия обработки (агрегации) информационного трафика и величины энергетической нагрузки конечных и промежуточных сегментов. Также возникают более глобальные задачи эффективного управления энергетическими ресурсами, оптимизации информационных и энергетических потоков (определение наименьших длин информационно-энергетических каналов), увеличение быстродействия ГИЭС и возможности оперирования их в режиме реального времени. Кроме того возникают задачи системного энергосбережения (определение путей для энергетических потоков с наименьшими энергетическими потерями и применение перспективных энергосберегающих технологий, например, светодиодных осветителей), решение которых невозможно без получения адекватных данных основных параметров сети ГИЭС: пропускной способности, скорости вычислений, скорости обслуживания запросов от конечных пользователей, вероятности отказа. Для определения которых необходимым является разработка универсальной математической модели, учитывающая показатели распределения как информационных, так и энергетических потоков.

Как и любые другие сети ГИЭС описываются с помощью методов теории массового обслуживания. В работе [4] был предложен математический аппарат описания процессов, который позволяет определять основные показатели информационной составляющей. Но для решения задач описания геоинформационно-энергетических сетей, кроме информационных параметров сети, необходимым являются определения еще и энергетических: энергетической загруженности, обслуживание запросов энергетического управления, время простоя при

запросе на энергетическую коммутацию и т. п. Поэтому необходима разработка модели сети на основе теории массового обслуживания, описывающая процессы распределения информационно-энергетических потоков в ГИЭС и позволяющая проводить их комплексную оценку.

**Принципы образования и распределения информационно-энергетических потоков в ГИЭС**

Основные принципы обработки информации в геоинформационно-энергетических системах были определены в работе [5]. Предложенная автором в [5] модель способа обработки информации основывается на параллельно-иерархическом Q-преобразовании [6] при обработке и передаче потоков информации в ГИЭС. Согласно этой модели предполагается выполнять параллельную обработку информации и передачу по волоконно-оптическому кабелю от центра обработки (центра управления ГИЭС) к конечному узлу геоинформационно-энергетической сети и в обратном направлении. Параллельно-иерархическая модель обработки и передачи предусматривает стойкое кодирование и высокоскоростную обработку данных, которая делает ее пригодной для применения в геоинформационно-энергетических средах [5].

Данные принципы соответствуют концепциям создания большинства известных геоинформационно-энергетических сетей и могут использоваться как базовая модель распределения.

Геоинформационно-энергетические сети можно рассматривать в качестве многоканальных сетей с очередями, в которых процессы информационного и энергетического обмена хорошо воссоздаются при помощи моделей теории массового обслуживания. В качестве параметров, характеризующих *энергетические потоки и составляющие* ГИЭС, выступают информационные запросы на коммутацию и перераспределение энергии питания. Модель сетей с очередями не может быть применена непосредственно для описания физического энергетического параметра (тока, оптического излучения и т. п.), поскольку он не может быть задержан во времени и поставлен в очередь.

Поскольку в ГИЭС предусмотрено значительное количество информационно-энергетических связей, то такие ГИЭС подпадают под *модель многоканальных сетей массового обслуживания с очередями* [7]. Данной модели присуще  $n$ -количество каналов, на которые поступает поток запросов с интенсивностью  $\lambda$ . Интенсивность обслуживания по одному каналу равна  $\mu$ , отношение интенсивностей общего и единичного уровней равно  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  [7]. В таком случае должно выполняться условие [7]:

$$\lambda_i = \lambda, \quad i=0,1,2,\dots;$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{при } i \leq n; \\ n\mu & \text{при } i > n. \end{cases}$$

Условие  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < n$  определяет вероятность единичного запроса [7]:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, & i < n; \\ p_i = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^{i-n}}{n^{i-n}} p_0 & i > n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p_0$  – вероятность простоя всех каналов ГИЭС, которая определяется как [7]:

$$p_0 = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0. \quad (2)$$

Среднее число занятых каналов  $k_{sz}$  [7]:

$$k_{sz} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(1-\rho/n)^2}. \quad (3)$$

Среднее число запросов определено как  $k_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$  [7]. Время информационных запросов ожидания в очереди [7]:

$$t_z = \frac{k_{sz} + \rho}{\mu n}. \quad (4)$$

Формулы (1) – (4) определяют основные характеристики ГИЭС при их оценке и сравнении при помощи модели многоканальной сети массового обслуживания с очередями.

### Математическая модель распределения потоков

Опираясь на изложенные в [5] положения, для информационно-энергетических потоков в геоинформационно-энергетических сетях можно отметить следующее:

1. Информационные связи в ГИЭС являются двунаправленными, а энергетические – однонаправленными (от энергостанции до конечных и промежуточных узлов);
2. Количество информационных связей приближенно равно количеству энергетических, (обеспечение условия автономности, согласно концепции оптических геоинформационно-энергетических технологий [8]), за исключением открытых оптических каналов, которые носят сугубо информационный характер.
3. Информационный обмен происходит согласно процессу обработки очереди запросов двустороннего направления, энергетический – в соответствии направлений поступления команд управления на органы управления энергетическим распределением.

На основе этого, с учетом многоканальной модели ММО можно записать модель образования и распределения информационно-энергетических потоков в оптических геоинформационно-энергетических сетях.

При  $n_{inf}$  – количество информационных каналов и  $n_{pow}$  – количество энергетических с соответствующими потоками запросов  $\lambda_{inf}$  и  $\lambda_{pow}$  и единичными интенсивностями  $\mu_{inf}$  и  $\mu_{pow}$ , при условии, что количество как информационных каналов, так и энергетических значительно больше количества узлов сети  $i$ .  $\mu_{inf} = n_{inf}\mu$ ,  $\mu_{pow} = n_{pow}\mu$ , при условии, что  $i > n$ . В приближении примем  $\mu_{pow} = \mu_{inf} = \mu$ . Вероятность единичного информационного запроса (для двухстороннего информационного канала с плотностью запросов или функцией загрузки сети  $\rho_{inf} = \frac{2\lambda_{inf}}{\mu}$ ) можно определить как:

$$p_{iinf} = \frac{2\lambda_{inf}^i}{\mu \cdot 2\mu \dots n_{inf} \mu \cdot (n_{inf}\mu)^{i-n_{inf}}} p_{0inf} = \frac{2\rho_{inf}^i}{n! n^{(i-n_{inf})}} p_{0inf} = \frac{2 \cdot \rho_{inf}^{n_{inf}}}{n!} \cdot \frac{\rho_{inf}^{i-n_{inf}}}{n^{i-n_{inf}}} p_{0inf}, \quad (5)$$

где  $p_{0inf}$  – вероятность простоя всех информационных каналов ГИЭС.

Аналогично для однонаправленного энергетического  $\rho_{pow} = \frac{\lambda_{pow}}{\mu}$ .

$$P_{i\ pow} = \frac{\lambda_{pow}^i}{\mu \cdot 2\mu \cdot \dots \cdot n_{pow} \mu \cdot (n_{pow} \mu)^{i-n_{inf}}} P_{0\ pow} = \frac{\rho_{pow}^i}{n! n^{(i-n_{inf})}} P_{0\ pow} = \frac{\rho_{pow}^{n_{inf}}}{n!} \cdot \frac{\rho_{pow}^{i-n_{inf}}}{n^{i-n_{inf}}} P_{0\ pow}. \quad (6)$$

Вероятность простоя всех информационных  $p_{0inf}$  и энергетических  $p_{0pow}$  каналов ГИЭС:

$$\begin{cases} p_{0inf} = \frac{P_{inf}^{n_{inf}+1}}{(n_{inf}-1)!(n_{inf}-\rho_{inf})^2} P_0 \\ p_{0pow} = \frac{P_{pow}^{n_{pow}+1}}{(n_{pow}-1)!(n_{pow}-\rho_{pow})^2} P_0 \end{cases}, \quad (7)$$

где  $p_0$  – вероятность полного простоя всех каналов ГИЭС,  $p_0 = 1 - (p_{ipow} + p_{iinf})$ ; среднее число занятых информационно-энергетических каналов  $k_{Sz}$

$$\begin{cases} k_{Szinf} = \frac{P_{inf}^{n_{inf}+1}}{n_{inf} n_{inf}! (1 - \rho_{inf} / n_{inf})^2} \\ k_{Szpow} = \frac{P_{pow}^{n_{pow}+1}}{n_{pow} n_{pow}! (1 - \rho_{pow} / n_{pow})^2} \end{cases}. \quad (8)$$

Среднее число запросов определяется как: для информационного потока  $k_{inf} = \rho_{inf}$  и для энергетического  $k_{pow} = \rho_{pow}$ . Время информационных запросов ожидания в очереди

$$t_z = \frac{k_{Szinf} + \rho_{inf}}{\mu n_{inf}}. \quad (9)$$

Если обозначить как  $p_{inf}(t)$  – функцию распределения информационных потоков сети ГИЭС, а  $p_{pow}(t)$  – как функцию распределения энергетических потоков, которые определяют  $p_{inf}$ ,  $p_{pow}$  – вероятности их возникновения, то для информационной и энергетической составляющей можно записать модель образования и распределения потоков:

$$\begin{cases} \frac{dp_{inf}(t)}{dt} = -(\lambda_{inf} + \mu_i) p_{inf}(t) + \lambda_{i-1inf} p_{i-1inf}(t) + \mu_{i+1} p_{i+1inf}(t) \\ \frac{dp_{pow}(t)}{dt} = -(\lambda_{ipow} + \mu_i) p_{ipow}(t) + \lambda_{i-1pow} p_{i-1pow}(t) + \mu_{i+1} p_{i+1pow}(t) \end{cases}, \quad (10)$$

где  $p_{inf}(t)$ ,  $p_{pow}(t)$  – функции распределения вероятностей возникновения информационных и энергетических потоков (запросов) во времени  $t$  от центра управления ГИЭС.

С помощью уравнения (10) при заданных значениях  $\lambda_{0inf}$ ,  $\lambda_{0pow}$  и  $\mu$  возможным является определение динамики распределения информационных и энергетических потоков в сети ГИЭС на основе модели массового обслуживания.

С помощью компьютерного моделирования в среде MathCad были получены графики изменений вероятностей единичных информационного и энергетического запросов от соответствующих им вероятностей простоя  $p_{0inf}$  и  $p_{0pow}$  (рис. 1) при условии, что

информационный обмен является двухсторонним с плотностью запросов  $\rho_{inf} = \frac{2\lambda_{inf}}{\mu_{inf}} = 0.4$ , при средней интенсивности потока  $\mu_{inf} = 50$  и количества потоков  $\lambda_{inf} = 10$  при количестве основных информационных каналов  $n_i = 4$ , а энергетический – однонаправленным с

плотностью запросов  $\rho_{pow} = \frac{2\lambda_{pow}}{\mu_{pow}} = 0.25$ , при средней интенсивности потока  $\mu_{pow} = 40$  и количестве потоков  $\lambda_{pow} = 5$  и количестве энергетических каналов  $n_i = 4$ .

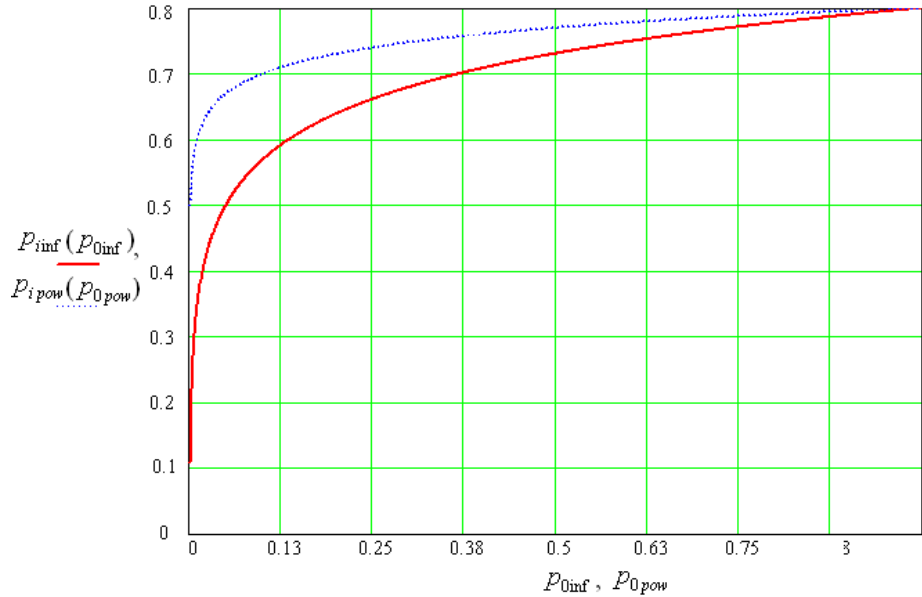


Рис. 1. График изменений вероятностей единичных информационного  $P_{inf}$  и энергетического  $P_{i\,pow}$  запросов от соответствующих вероятностей простоя  $P_{0\,inf}$  и  $P_{0\,pow}$

Для исследования динамики изменений вероятностей  $P_{inf}$  и  $P_{i\,pow}$  рост интенсивности запросов  $\lambda_{inf}$ ,  $\lambda_{pow}$  можно задать с помощью графа (рис. 2).

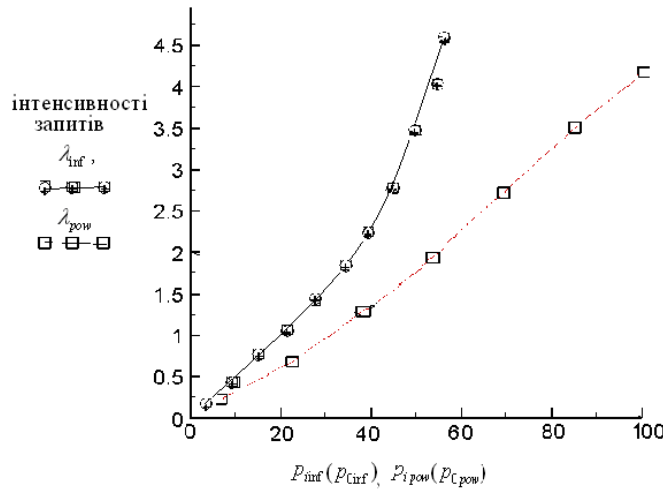


Рис. 2. Граф роста интенсивностей запросов  $\lambda_{inf}$ ,  $\lambda_{pow}$

При изменении начальных условий модели, в частности увеличении интенсивности потоков  $\mu_{inf} = 70$ , и количества потоков  $\lambda_{inf} = 20$  (для информационных каналов), и  $\mu_{pow} = 60$  и количестве потоков  $\lambda_{pow} = 15$  (для энергетических), при одновременном их увеличении  $n_i = 10$ , была получена следующая зависимость вероятностей (рис. 3).

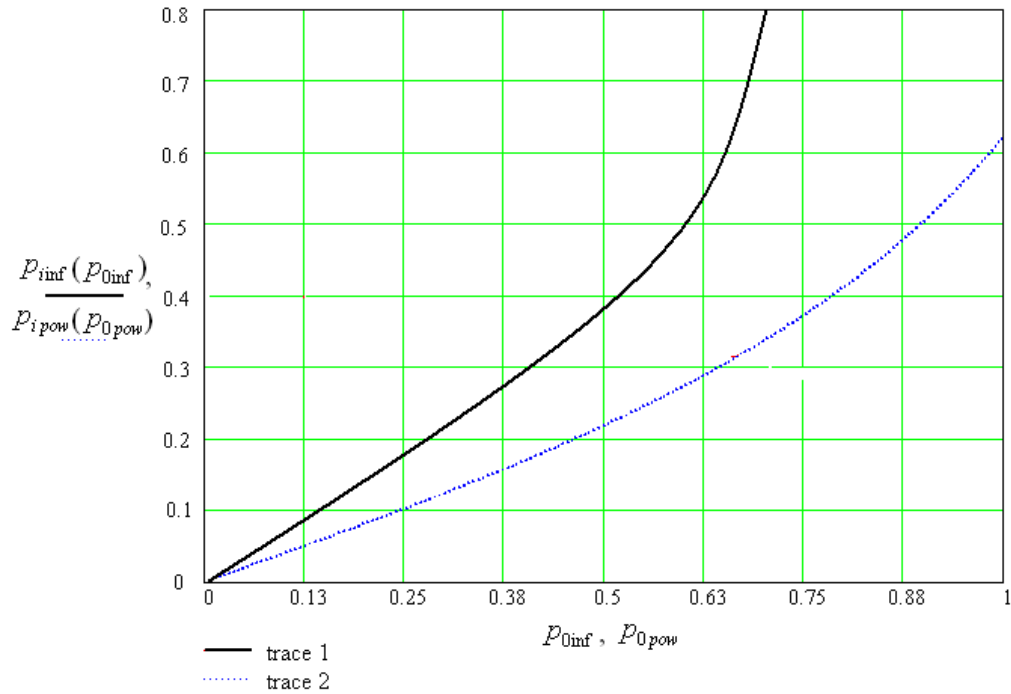


Рис. 3. Изменение вероятностей единичных информационного  $p_{inf}$  и энергетического  $p_{pow}$  запросов при увеличении параметров модели  $\mu_{inf}$ ,  $\lambda_{inf}$ ,  $\mu_{pow}$ ,  $\lambda_{pow}$  и  $n_i$

Учитывая, что возникновение информационно-энергетических потоков находится в  $i$ -ый момент времени в определенном количестве каналов  $n_{inf}$  и  $n_{ipow}$  из всего их количества  $N_{inf-pow} = n_{inf} + n_{ipow}$  и определенный характер изменений вероятностей простоя всех информационных  $p_{0inf}$  и энергетических  $p_{0pow}$  каналов (рис. 3), можно записать приближение для системы уравнений (10):

$$\begin{cases} \frac{dp_{0inf}(t)}{dt} = -\lambda_{0inf} p_{0inf}(t) + \mu p_{1inf}(t) \\ \frac{dp_{0pow}(t)}{dt} = -\lambda_{0pow} p_{0pow}(t) + \mu p_{1pow}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Причем на рис. 3 наблюдается большая крутизна характеристики для вероятности информационных запросов  $p_{inf}$  (верхняя кривая), что обусловлено большим ростом интенсивностей запросов от информационных узлов сети. Поскольку последних значительно больше чем энергетических, тем более, что согласно принципам распределения потоков: информационный обмен в ГИЭС является двусторонним (полная дуплексная организация связей), что предусматривает коэффициент 2 в формуле (5).

Средняя задержка при ожидании определяется формулой [9]:

$$T_c = \sum_{i=1}^V \left( \frac{\lambda_i}{\mu} \right) \left[ \frac{1}{\mu B_i - \lambda_i} \right], \quad (12)$$

где  $B_i$  – скорость передачи единичного канала звена сети.

Ограничение при выполнении расчетов – выполнение неравенства  $0 \leq \lambda_i / \mu < B_i$  [9]. Для исследования динамики роста средней задержки  $T_c$  применяются формулу [9]:

$$\frac{dT_c}{d\lambda_i / \mu} = \frac{B_i}{f(B_i - \lambda_i / \mu)^2} \quad i = 1, n, \quad (13)$$

где  $f(B_i - \lambda_i / \mu)$  – функция распределения трафика сети во времени.

Динамика роста средней задержки является положительной  $\frac{dT_c}{d\lambda_i / \mu} > 0$  при всех значениях  $i = 1, n$ .

Для решения задачи оптимизации распределения потоков в сети ГИЭС целесообразно использовать распределение по маршрутам с каналами наименьшей длины  $l_i$ . Для этого необходимым является нахождение кратчайшего пути между узлом-источником  $j$  и узлом-адресатом  $k$  и отправление потока в этом направлении. Существует ряд эффективных алгоритмов поиска кратчайших путей  $w_{jh}$ , одним из которых является алгоритм Флойда [9]. Сущность этого метода оптимизации распределения потоков связана с сопоставлением длины с  $i$ -ым каналом, величина которой [9]:

$$l_i \cdot \Delta \frac{dT_c}{d\lambda_i / \mu} = \frac{B_i}{f(B_i - \lambda_i / \mu)^2}, \quad (14)$$

когда поток в канале равен величине  $\lambda_i / \mu$ . Найденная в такой способ длина является линейной скоростью роста  $T_c$  при бесконечно малом увеличении потока в канале. Такие длины можно использовать для поиска потоков по кратчайшим маршрутам. Качественным показателем для оценки динамики загруженности сети ГИЭС может быть усредненные функции распределения информационных  $f_{inf}(t, \lambda)$  и энергетических  $f_{pow}(t, \lambda)$  потоков (рис. 4), которые характеризуют динамику роста загруженности сети ГИЭС во времени и определяются интегралом функции распределения информационно-энергетических потоков:

$$f_{inf}(t, \lambda) = - \int_t^{\Delta t} \lambda_{0inf} P_{0inf}(t, \lambda) dt, \quad (15)$$

$$f_{pow}(t, \lambda) = - \int_t^{\Delta t} \lambda_{0pow} P_{0pow}(t, \lambda) dt$$

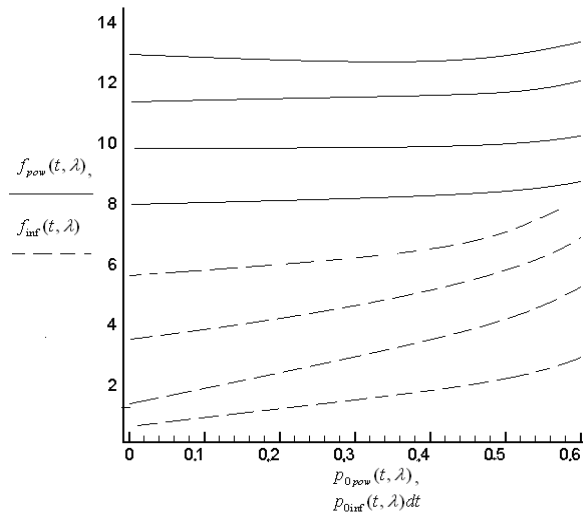


Рис. 4. График функций распределения информационных  $f_{inf}(t, \lambda)$  и энергетических  $f_{pow}(t, \lambda)$  потоков

Анализируя характер изменения кривых для функций распределения информационных  $f_{inf}(t, \lambda)$  и энергетических  $f_{pow}(t, \lambda)$  потоков (рис. 4), можно наблюдать, что динамика роста функции распределения информационных потоков является большей  $f_{inf}(t, \lambda)$  (семейство 4-

х кривых, рис. 4, снизу), что подтверждают полученные результаты на рис. 3 и еще раз свидетельствуют о том, что интенсивности роста информационной составляющей ГИЭС имеют более направленный и динамичный характер.

Параллельный рост функции распределения энергетических  $f_{pow}(t, \lambda)$  потоков ГИЭС свидетельствует об увеличении энергетической нагрузки со стороны конечных устройств, которые инициируют информационные запросы. Что является справедливым, поскольку увеличение информационной нагрузки и числа каналов невозможно без увеличения энергетического. Структуры всех известных ГИЭС имеют иерархический характер, т. е. все информационно-энергетические потоки сети сводятся к центру управления, который является центральным узлом сети. Поэтому можно утверждать, что наибольшая загруженность будет именно в сегменте центра управления, поскольку как интенсивности потоков  $\lambda_{0inf}, \lambda_{0pow}$  так и  $p_{0inf}(t, \lambda), p_{0pow}(t, \lambda)$  – функции распределения вероятностей в этом сегменте, которые для удобства проще задавать по экспоненциальным  $p_{0inf}(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$  [7] или по закону распределения Пуассона  $p_{0inf}(t, \lambda) = \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$  [7]. Функции распределения информационно-энергетических потоков здесь также будут иметь наибольшие значения:

$$f_{inf}(t, \lambda) \rightarrow f_{inf}(t, \lambda)_{max} \quad f_{pow}(t, \lambda) \rightarrow f_{pow}(t, \lambda)_{max} . \quad (16)$$

На рис. 5 показан прирост функций распределения информационно-энергетических потоков.

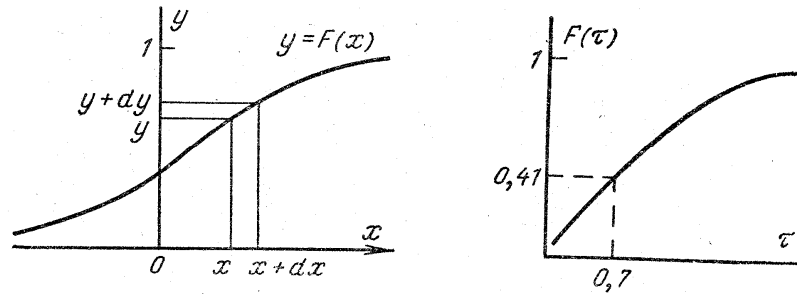


Рис. 5. График прироста функций распределения информационно-энергетических потоков

Максимумы  $f_{inf}(t, \lambda)_{max}, f_{pow}(t, \lambda)_{max}$  будут характеризовать состояние загрузки как критическое для сети ГИЭС. Учитывая это, необходимым является использования в этих сегментах скоростных магистральных линий на основе бинарного проводника, который обеспечит как наибольшие энергетическую и информационную пропускные способности, так и высокую скорость информационной передачи, которая значительно уменьшит время задержки и соответственно уменьшит загруженность сети.

### Выводы

Задача определения характера распределения потоков в геоинформационно-энергетических сетях нуждается в решении не только со стороны информационной составляющей, но и энергетической. Предложенная математическая модель позволяет вероятностными методами определить такие показатели ГИЭС, как загруженность, среднее время пребывания запросов в очереди, среднее число занятых информационно-энергетических каналов, вероятности простоя. В статье предложена математическая модель распределения информационно-энергетических потоков на основе теории сетей массового обслуживания и получены графические зависимости для основных динамических характеристик ГИЭС путем компьютерного моделирования в среде MathCAD.



Перспективним являється застосування даної моделі при проектуванні і масштабуванні геоінформаційно-енергетических мереж.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Оптико-електронна геоінформаційно-енергетична система тотального тестування і оптимального управління науково-освітніми і бібліотечними ресурсами для створення і розвитку централізованої бази знань / В. П. Кожем'яко, О. Г. Домбровський, І. Д. Івасюк, О. В. Шевченко, С. В. Дусанюк, С. С. Білан, А. В. Кожем'яко // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2005. – № 1 (9). – С. 5-11. – ISSN 1681-7893.
2. Кожем'яко В. П. Оптико-електронна геоінформаційно-енергетична система управління інфраструктурою регіону / В. П. Кожем'яко, О. А. Бойко // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2007. – № 1 (13). – С. 176 – 180. – ISSN 1681-7893.
3. Кожем'яко В. П. Оптико-електронна геоінформаційно-енергетична система біомедичного призначення / В. П. Кожем'яко, С. В. Павлов, О. В. Шевченко, В. В. Дмитрук // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2006. № 2 (12). – С. 192 – 196.
4. Кожем'яко В. П. Методи моделювання геоінформаційно-енергетичної системи тотального тестування і оптимального управління науково-освітніми і бібліотечними ресурсами / В. П. Кожем'яко, С. В. Дусанюк, Л. О. Волонтир // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2007. – №1 (13). – С. 169 – 175. – ISSN 1681-7893.
5. Шевченко О. В. Паралельно-ієрархічні методи передачі та обробки інформації у автоматизованій геоінформаційно-енергетичній системі: Дис. канд. техн. наук: 05.13.16 / Шевченко Ольга Вікторівна. – К., 2007. – 168с.
6. Кожем'яко В. П. Паралельно-ієрархічні мережі як структурно-функціональний базис для побудови спеціалізованих моделей образного комп'ютера ; [Монографія] / В. П. Кожем'яко, Л. І. Тимченко, А. А. Яровий. – Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2005. – 160 с.
7. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики: Учебное пособие для вузов 2-е изд. / Ю.М. Коршунов. – М.: Энергия, 1980. – 424 с.
8. Кожем'яко В. П. Принципи побудови та структурна організація каналів для повністю оптичних геоінформаційно-енергетических мереж / В. П. Кожем'яко, В. І. Малиновський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця, ВНТУ. – 2008. – № 1. – С. 95 – 101.
9. Васильев В. И. Системы связи: Учебное пособие для вузов / В. И. Васильев, А. П. Буркин, В. А. Свириденко. – М.: Высшая школа, 1987. – 280 с.

**Кожем'яко Владимир Прокофьевич** – д. т. н., профессор, заведуючий кафедрой лазерной и оптоэлектронной техники, E-mail: kvp@vstu.vinnica.ua.

**Малиновский Вадим Игоревич** – аспирант, инженер кафедры лазерной и оптоэлектронной техники, тел.: 8(0432) 58-63-25, моб.: 80977962176, E-mail: tirexlink@mail.ru .

Винницкий национальный технический университет.