УДК 519.6.075

В. О. Комар, к. т. н.; В. В. Тептя

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

В данной статье предлагается метод, основанный на объединение теории марковских процессов и принципов критериального моделирования, что позволяет, не теряя общности подхода, сделать выбор наилучшего варианта функционирования исследуемой системы за одним критерием без определения абсолютного (числового) значения выходного эффекта, кроме этого метод даёт возможность учесть надёжность системы при принятии решения по её оптимизации.

Ключевые слова: *качество функционирования, марковский процесс, критериальная модель.*

Введение

Развитие современной науки и техники, а также новые экономические условия инициируют новые задачи в области управления электроэнергетическими системами (ЭЭС). Благодаря возрастающим возможностям вычислительной и микропроцессорной техники становится реальным автоматизировать оптимальное управление режимами [1, 2], целью которого является увеличение надежности электроснабжения и уменьшение потерь электроэнергии во время ее выработки, транспортирования и распределения.

В настоящее время системы управления в масштабе реального времени широко используются в электроэнергетике [3]. В ЭЭС система управления технологическим процессом известна как автоматизированная система диспетчерского управления (АСДУ). Она отвечает за мониторинг и управление энергетическими объектами генерирующих, передающих и распределительных компаний.

АСДУ принадлежат к сложным системам, то есть они имеют способность во время отказа элементов продолжать выполнение своих функций, но со сниженной эффективностью, то есть могут находиться в нескольких рабочих состояниях. Эта особенность автоматизированных систем управления для оценки эффективности ее работы требует определения такого показателя как качество функционирования, которое непосредственно влияет на уровень достигнутого оптимального режима объектом управления (электроэнергетической системой) [4]. Качество функционирования – это степень приспособленности системы к выполнению определенных для нее функций. Количественный показатель, который выражает меру полезности системы для потребителя и называется показателем или критерием качества функционирования. Обычно в нем учитывается надежность системы как один из факторов, что влияет на результат задачи, которая разрешается [4, 5].

В этой связи разработка математических методов исследования АСДУ с распределенной архитектурой является важным и **актуальным** заданием. **Цель** статьи заключается в разработке математической модели качества функционирования систем оптимального управления состояниями таких динамических систем как ЭЭС для повышения эффективности их эксплуатации.

Математическая модель качеств функционирования системы

Рассматривается система, которая в процессе эксплуатации может приобретать различные состояния. Эти состояния являются рабочими, но они отличаются между собой качеством выполнения системой своих функций. Изменение состояний обусловлено изменением уровня надежности элементов системы. В таком случае критерием оптимальности при сравнении вариантов функционирования системы является максимум нахождения ее в состояниях, когда параметры находятся в пределах допустимых значений. Изменение состояний системы можно изобразить с помощью графов, примером может служить граф на рисунке 1.

По графу (рис. 1) можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова [6]. Приняв к сведению допущения о не учете динамики переходных процессов между отдельными состояниями ($\frac{dp_i}{dt} = 0$), система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} p_i = 0, \ \ j = \overline{2, n} \\ &\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где p_i вектор вероятностей состояний исследуемой системы; ν_{ij} – элементы матрицы ν, которая является матрицей интенсивности переходов из одного состояния в другое; m – количество возможных состояний исследуемой системы; n – количество направлений изменения состояний, которые выходят из рабочего состояния 1 (см. рисунок 1).

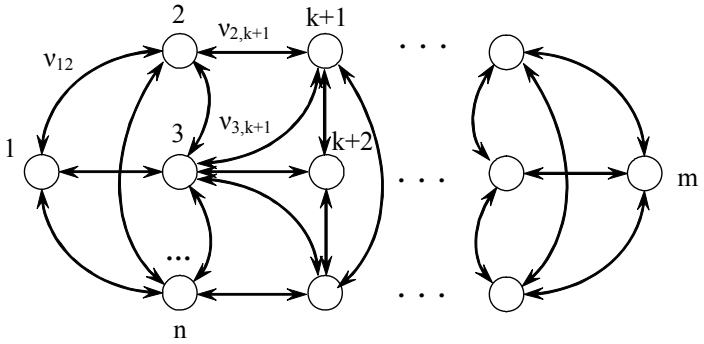

Рис. 1. Граф изменения состояний системы

Для определения вероятностей рабочих состояний и оценки качества функционирования исследуемой системы необходимо решить алгебраическую систему уравнений (1), которая в более общем виде записывается:

$$\nu \cdot p = b. \tag{2}$$

В критериальном программировании систему уравнений ортогональности и нормирования можно записать [7]:

$$\alpha \cdot \pi = b, \tag{3}$$

где α – матрица показателей; π – вектор критериев подобия.

Проанализировав системы уравнений (2) и (3), можно отметить, что матрица коэффициентов ν системы уравнений (2) является аналогичной матрице размерностей α системы уравнений (3), что применяется в теории подобия [7, 8, 9], а вектор **p**, компоненты которого являются в сущности взвешивающими коэффициентами состояний исследуемого процесса, по своему содержанию отвечает вектору критериев подобия π, элементы которого являются безразмерными соотношениями параметров системы, и в том случае, когда они определяются методом интегральных аналогов, также являются весомыми коэффициентами составляющих целевой функции (пронормированные к единице) [7]. Следовательно, можно провести аналогию между системой уравнений (2) и (3).

Для подтверждения аналогии (одного из видов подобия) между системой уравнений ортогональности и системой уравнений Колмогорова используем теоремы теории подобия. Для этого построим многочлены от матриц α и ν.

Если воспользоваться интерполяционным многочленом [10], то матрицу α системы уравнений ортогональности (2) критериального программирования и матрицу переходов ν

системы уравнений (4) можно привести к матричному многочлену. Используем для этого экспоненциальную функцию $f(z)=e^{zt}$. Если минимальный многочлен (в данном случае это характеристический многочлен $\Delta(z)$) состоит только из линейных множителей $(z-z_k)$, то достаточно определить функцию $f(z)$ в характеристических точках $z_1, z_2, ..., z_m$. При этом система уравнений для коэффициентов интерполяционного многочлена имеет вид:

$$f(z_k)=a_0+a_1z_k+\ldots+a_{m-1}z_k^{m-1}, \tag{4}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ \ldots \\ f(z_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \ldots & z_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему относительно $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$, получим:

$$f(A)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i A^i .$$

Следовательно, в общем виде матрица α будет иметь многочлен вида:

$$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \alpha^i . \tag{5}$$

А матрица ν:

$$f(\nu)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \nu^i . \tag{6}$$

Сделав такое преобразование, можно использовать все свойства скалярных многочленов, в том числе и следствия теорем теории подобия.

Известно [11], что для установления подобия между оригиналом и моделью вместо условий:

$$p_i=\frac{a_i\prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_{ji}}}{f}=\text{idem}, \tag{7}$$

могут использоваться равнозначные им выражения:

$$\mu_i=\frac{\mu_{a_i}\prod_{j=1}^{n}\mu_{u_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f}, \tag{8}$$

где π_i – критерии подобия, определенные способом интегральных аналогов; μ_i – индикаторы подобия, которые определяется масштабами соответствующих коэффициентов и параметров модели.

Используя эти условия, можно доказать подобие матричных многочленов и соответствующих им матриц.

Для матричных многочленов (5) и (6) условие (8) можно записать:

$$\frac{\mu_{a_1}}{\mu_f}=1;\ \frac{\mu_{a_2}\mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f}=1;\ \frac{\mu_{a_3}\mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f}=1 \text{ и т.д.},$$

где $\mu_{a_i} = \dfrac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}}$; $\mu_{\alpha/\nu} = \alpha \cdot \nu^{-1}$; $\mu_f = \dfrac{e^{|\alpha|t}}{e^{|\nu|t}}$.

В теории матриц есть раздел матричных преобразований [10]. Согласно ему эквивалентное превращение можно рассматривать как переходы к новым координатным базисам для вектора x и y, то есть $x' = Q^{-1}x$ и $y' = Py$. То есть преобразование $\widetilde{A} = PAQ$ отвечает независимым превращениям координат, которые определяются матрицами Q^{-1} и P (неособенные квадратные матрицы).

Если векторы x и y превращаются к одному координатному базису, то можно записать $P = Q^{-1}$. То есть, переходим к преобразованию подобия $\widetilde{A} = Q^{-1}AQ$. Важным свойством преобразования подобия является то, что определитель матрицы инвариантный относительно этого преобразования:

$$\det \widetilde{A} = \det A.$$

Следовательно, такое преобразование не меняет собственных значений матрицы, поэтому можно записать:

$$\det[zE - \widetilde{A}] = \det[zE - A].$$

Результат решения системы уравнений (4) для матриц $\widetilde{A}$ и A будет одинаковым.

Роль преобразовательной матрицы Q играет модальная матрица H [10], то есть $\widetilde{A} = H^{-1}AH$. Она может быть определена как совокупность столбцов $\mathrm{h}^{(i)}$, которые являются решением однородных уравнений:

$$(z_i E - A)h^{(i)} = 0 \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где n – ранг матрицы A.

По построению матриц α та ν можно отыскать такую матрицу H, которая удовлетворяла бы систему однородных уравнений (9). Следовательно, $\mu_{a_i} = \dfrac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}} = 1$; $\mu_{\alpha/\nu} = \alpha \cdot \nu^{-1} = 1$; $\mu_f = \dfrac{e^{\left|\alpha^t\right|}}{e^{\left|\nu^t\right|}} = 1$, а поэтому выполняются условия (8), которые подтверждают подобие матриц ортогональности критериального программирования и переходов системы уравнений Колмогорова.

Схожесть моделирования марковских процессов и критериального моделирования позволяет применить к системе уравнений (2) принципы критериального программирования.

Система уравнений (3) в критериальном программировании отвечает прямой задаче [7]:

$$\min \left\{ y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \right\}, \tag{10}$$

где $y(x)$ – некоторый обобщающий технико-экономический показатель, который характеризует исследуемый процесс, x_j – переменные параметры системы, значения которых оптимизируются; a_i, α_{ji} – постоянные коэффициенты, значения которых определяются свойствами системы; m – количество членов целевой функции; n – количество переменных.

По аналогии целевая функция критериальной программы для системы уравнений (2) записывается так:

$$\min\left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\nu_{ji}} \right\}, \tag{11}$$

где *f(x)* – функция отказов, которая отображает влияние элементов системы на способность выполнять поставленную ею задачу; c_i – постоянные коэффициенты (в задачах рассматриваемого типа c_i=1); x_j – независимые параметры, которые характеризуют состояния системы.

Таким образом, получена зависимость (11) вместо системы уравнений, которая отображает функционирование исследуемой системы.

Продолжая использовать аналогии к прямой задаче КП, можно записать двоистую задачу [7]. Для уравнения (11) двоистая задача будет иметь вид:

$$d(P) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{c_i}{P_i} \right)^{P_i}, \tag{12}$$

где P_i – критерий подобия, который в данном случае является вероятностью пребывания системы в состоянии *i*.

Следовательно, благодаря используемому подобию, вместо системы уравнений (1) получены две функциональные зависимости (11) и (12), которые позволяют оценивать такие свойства системы, как отказ и качество функционирования.

Критериальное моделирование качеств функционирования системы

Функция (11) удобна в использовании, если ее перевести к критериальному виду путем деления на базис. За базис принимается значение функции (11) для системы на момент введения ее в эксплуатацию. Критериальная функция отказов имеет такой вид:

$$f(x_*) = \sum_{i=1}^{m} P_i \prod_{j=1}^{n} x_{*j}^{\nu_{ji}} . \tag{13}$$

Графический вид функции (13) показан на рисунке 2. Критерии подобия P_i определяются из системы уравнений (1). Для нахождения относительного значения коэффициентов влияния x_{*j} необходимо определить обратную матрицу $\tilde{\nu}$ к транспонированной матрице ν^t [8], в которой последний столбик состоит из -1. Дальше находится отношение между значениями переменных x_j (после последнего тестирования системы) и x_{0j} (после тестирования перед вводом в эксплуатацию).

$$x_{*j} = \frac{\prod_{i=1}^{m} P_i^{\tilde{\nu}_{ji}}}{\prod_{i=1}^{m} P_{0_i}^{\tilde{\nu}_{0ji}}} .$$

В процессе эксплуатации, характеристики надежности элементов системы изменяются, что в свою очередь приводит к изменению состояния системы в целом. То есть происходит изменение вероятностей пребывания системы в том или ином состоянии. Уточнение вероятностей осуществляется по теореме Байеса:

$$P_{i,реал} = P_{i,нач} \frac{p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_i)}{\sum_{j=1}^{m} P_{j,поч} p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_j)},$$

где $P_{i,реал}$ – апостеорные вероятности; $P_{i,нач}$ – априорные вероятности, которые определены из системы уравнений (1); $p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_i)$ – плотность вероятностей определения состояния s_i

для определенных признаков (параметров) системы $\bar{x}$, если признаки непрерывны, и распределение вероятностей, если признаки дискретны.

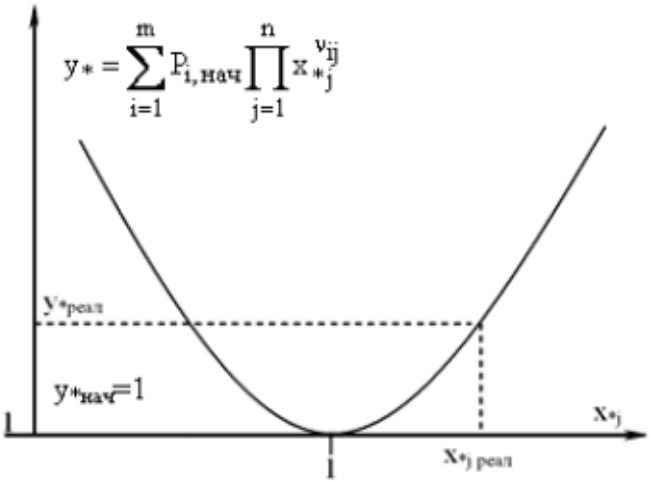

Рис. 2. Критериальная функция отказов

Функция отказов может использоваться как для оценки реального состояния системы, так и для уточнения зоны нечувствительности, учитывая уровень надежности, во время реализации закона управления, например, в таких сложных системах как электроэнергетическая.

Для оценки качеств функционирования системы и разработки стратегии по возобновлению элементов системы используется функция (12). Для удобства использования функции качеств функционирования ее необходимо привести к виду:

$$d_*(P_*) = \prod_{i=1}^{m} \frac{P_i^{P_i}}{P_{0i}^{P_{0i}}}.$$

Графическое изображение этой функции изображено на рисунке 3.

Если рассмотреть задачу планирования работ по повышению качества функционирования системы, то лучше рассмотреть годограф функции качеств (см. рисунок 4). По осям откладывается изменение безотказности и ремонтопригодности. Эти параметры взяты условно. Соответственно поле годографа разбито на пять областей по безотказности и ремонтопригодности. Эти области также разбиты условно.

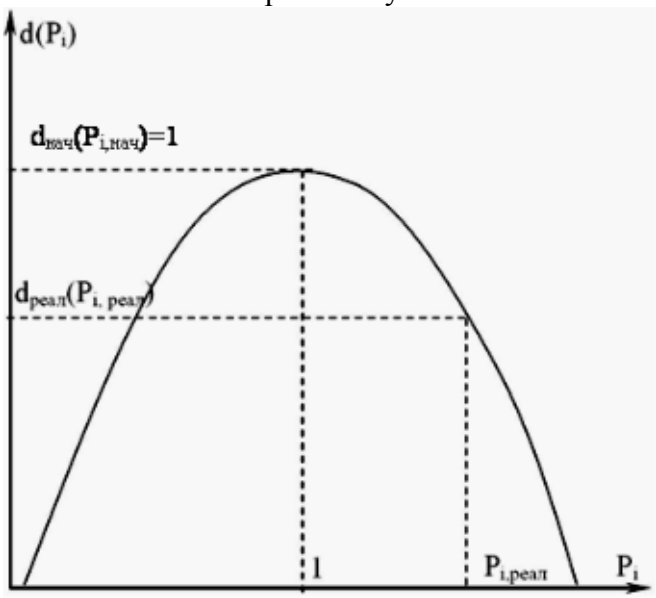

Рис. 3. Функция качества функционирования

Рис. 4. Распределение требований к надежности элементов

На рисунке 4 точка *T* – достигнутый уровень надежности системы; *M* – точка, где функция качеств функционирования достигает своего максимального значения; *B* – точка, которая отвечает желаемому уровню надежности системы; кривые L_1, L_2, L_3 – линии годографа функции $d(P_i)$, то есть геометрическое место точек, где функция сохраняет свое значение. Каждая линия годографа L_i отвечает определенному уровню качества функционирования.

Каждый план мероприятий, направленных на смену показателей надежности элементов системы с целью повышения качества ее функционирования, представляет собой траекторию S_i. Например, на рисунке 4 траектория S_1 предусматривает прежде всего реализацию мероприятий, направленных на повышение безотказности, и ремонтопригодности. С другой стороны, траектория S_2, прежде всего, повышает характеристики ремонтопригодности. Если известна функция ресурсов, то есть функция затрат определенного ресурса для достижения заданного уровня качеств функционирования, то можно определить стоимость выполнения траектории.

Выводы

Описаный выше подход позволяет решать такие задачи:

1. Определять область значений показателей безотказности и ремонтопригодности элементов, которые обеспечивают заданный уровень качества функционирования системы (области ограничены линиями годографа).
2. Определять минимальные требования к ремонтопригодности и безотказности элементов, которые обеспечивают заданный уровень качества функционирования системы.
3. Оценить степень влияния показателей надежности элементов на качество функционирования системы.
4. Определять стратегию повышения качества функционирования системы к заданному уровню в условиях естественного старения элементов и ограничений на ресурсы.
5. Оценить необходимость и определить очередность мероприятий по модернизации элементов.
6. Оценить необходимость и определить состав мероприятий для реконструкции системы по критерию качества функционирования.
7. Оценить необходимость и определить очередность мероприятий для продолжения

остаточного ресурса элементов.

Достаточно существенным во время решения этих задач является тот факт, что результат получается в отношении к начальному состоянию. Это позволяет значительно сократить количество рассчетов для сравнения состояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джексон П. Введение в экспертные системы. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. – 624 с.
2. Основы теории оптимального управления/ Под ред. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 429 с.
3. Арзамасцев Д.А., Холен А.Н., Бартоломей П.И. АСУ и оптимизация режимов энергосистем. – М.: Наука, 1983. – 256 с.
4. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированых систем. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: "Энергия", 1977. – 536 с.
5. Кузьмін І.В. Критерії оцінки ефективності, якості та оптимальності складних систем. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – № 1(2). – 1994. – С. 5 – 10.
6. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 176 с.
7. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. – К.: УМК ВО, 1989. – 137 с.
8. Бевз С.В. Розробка засобів критеріального моделювання для задач оптимального керування. Автореф. дис. к-та техн. наук: 01.05.02. – Вінниця, 1999. – 19 с.
9. Лежнюк П.Д., Комар В.О., Томашевський Ю.В. Критеріальне моделювання в задачах оцінки якості функціонування систем // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – №3. – С. 48 – 52.
10. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.
11. Лежнюк П.Д., Собчук Н.В. Параметрична подібність в задачах оптимізації електричних систем. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 100 с.

Комар Вячеслав Александрович – доцент кафедры;

Тептя Вера Владимировна – ассистент кафедры.
Кафедра электрических станций и систем, Винницкий национальный технический университет