УДК 621.311.75

П. Д. Лежнюк, д. т. н., проф.; О. Ю. Петрушенко; Жан-Пьер Нгома, к. т. н., доц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ И ИНДИКАТОРОВ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ

Рассматриваются способы определения вторичных критериев и индикаторов подобия для установления параметрического подобия в исследуемом процессе. Показано, что с помощью вторичных критериев и индикаторов подобия могут решаться задачи оптимизации состояний систем.

Ключевые слова: *подобие, вторичные критерии, индикаторы, сложные системы, оптимизация.*

Введение

В прикладных задачах теории подобия и моделирования используются вторичные критерии подобия, которые являются отношением критериев подобия [1]. Последние же по определению [1] являются безразмерными комбинациями параметров, которые численно одинаковы для всех подобных процессов. С помощью вторичных критериев подобия устанавливается параметрическое подобие исследуемых процессов. Весьма важными вторичные критерии подобия являются тогда, когда они характеризуют параметрическое подобие оптимальных вариантов. Таким, например, есть критерий Кельвина, который отображает оптимальное соотношение составляющих затрат на сооружение линий электропередачи [2]. Вторичные критерии устанавливают устойчивые соотношения между отдельными составляющими целевой функции, которые при определенных условиях могут трактоваться как законы оптимального управления процессами в системе [3].

В данной статье рассматриваются способы определения вторичных критериев и примеры использования их в задачах оптимизации состояний систем.

Постановка задачи относительно определения вторичных критериев и индикаторов подобия

Сформулируем задачу оптимального управления таким образом:
минимизировать

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \tag{1}$$

при условиях

$$g_k(x) = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k = \overline{1,h}, \quad x_j > 0, \tag{2}$$

где f(x) – некоторый обобщенный технико-экономический показатель оптимизируемого процесса; $g_k(x)$ – ограничения, определяющие допустимую область исследования процесса; a_i, α_{ji}, G_k – постоянные коэффициенты, значения которых определяются свойствами системы; x_j – переменные параметры системы, значения которых оптимизируются; m_1 – количество членов целевой функции; m – суммарное количество членов целевой функции и ограничений; n – количество переменных; h – количество ограничений.

В выражениях (1) и (2) для удобства дальнейшего анализа принята сплошная индексация составляющих целевой функции и ограничений.

Для задачи (1) – (2) возможны два вида критериев подобия в зависимости от выбранной базы. Согласно способу интегральных аналогов критерии подобия определяются делением всех членов уравнения на один из них [1]. Если выбрать за базовый, например, l-й член, то получим критерии подобия вида

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{a_l \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jl}}}. \qquad (3)$$

Если за базу принять f(x), то критерии подобия будут иметь вид

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{f(x)}. \qquad (4)$$

В последнем случае критерии подобия, которые относятся к целевой функции, имеют содержание весовых коэффициентов и характеризуют вклад каждого члена у значение критерия оптимальности. Критерии подобия, которые относятся к ограничениям, характеризуют чувствительность критерия оптимальности к последним. В [4] показано, что $\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i$ – это нормированные множители Лагранжа k-го ограничения.

Очевидно, что преимущественно в задачах оптимального управления используется вторая форма критериев подобия, поскольку они в этом случае являются более информативными [4]. Особенно, когда критерии подобия определены для экстремального значения критерия оптимальности согласно задаче (1)–(2). В этом случае каждый критерий подобия показывает, какую часть вносит в оптимальное значение критерия оптимальности соответствующий член целевой функции. Из выражений вида (4) может быть сформирована система уравнений относительно переменных x_j, из которой при условии оптимальности π_{io} определяются оптимальные значения x_{jo}. Это так называемая обратная задача критериального программирования [4].

В зависимости от формы выражений целевой функции и ограничений, а также соотношения количества членов m и количества переменных n задача (1) – (2) решается по разным алгоритмам. Когда задача (1) – (2) существует в аналитическом виде, т.е. известны коэффициенты a_i, α_{ji}, то возможны два случая: 1) s=m–n+1=0, 2) s=m–n+1>0. В (1) – (2) могут быть известны показатели степени α_{ji} , которые определяют характер зависимостей f і g, а коэффициенты a_i неизвестны или известны частично, или заданы возможным диапазоном существования.

В данной статье рассматриваются алгоритмы решения задачи аналитически сформулированной со степенью сложности s=0 и s>0.

Определение вторичных критериев и индикаторов подобия

Оптимальные значения критериев подобия для задачи (1)–(2) определяются из условий ортогональности и нормирования [4]:

$$\boldsymbol{\alpha\pi} = \mathbf{b}, \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ \alpha_{13}...\ \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...\alpha_{2m} \\ .... \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}...\alpha_{nm} \\ 1\quad 1...\ 0\ \ ...\ 0 \end{vmatrix}$; $\boldsymbol{\pi} = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ ... \\ \pi_m \end{vmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{vmatrix}$.

В последней строке матрицы **α** количество единиц равняется количеству членов в целевой функции (1), а именно m_1 . Если система уравнений (5) определенная (s=0), то критерии подобия могут быть найдены по правилу Крамера [5]:

$$\pi_i = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_i}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1} \sum_{t=1}^{n+1} b_t \|\boldsymbol{\alpha}_{ti}\|, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ – определитель матрицы **α** системы уравнений (5); $\|\boldsymbol{\alpha}\|_i$ – определитель матрицы **α**, в которой вместо i-го столбца записан вектор свободных членов **b**; $\|\boldsymbol{\alpha}_{ti}\|$ – алгебраические дополнения, записанные по i-му столбцу матрицы **α**, в которой вместо i-го столбца записан вектор свободных членов **b**.

С учетом значений составляющих вектора **b**, последнее выражение перепишется:

$$\pi_i = \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1} \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,i}\|, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Воспользуемся теперь выражением (7) и запишем вторичный критерий подобия как отношение p-го и q-го критериев подобия:

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,p}\| \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,q}\|^{-1}. \tag{8}$$

С (7) и (8) видно, что при условии m=n+1 как критерии подобия, так и вторичные критерии подобия определяются только показателями степени параметров x_j .

Частный случай, когда некоторый параметр x_j входит только в два члена уравнения – p-и и q-и. В этом случае для параметра x_j условие ортогональности запишется

$$\alpha_{jp}\pi_p + \alpha_{jq}\pi_q = 0.$$

Из последнего уравнения получается, что вторичный критерий подобия

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = -\alpha_{jq}\ \alpha_{jp}^{-1}. \tag{9}$$

Заметим, что выражением (9) в отличие от (8) можно воспользоваться и тогда, когда система уравнений (5) является неопределенной (в критериальном программировании это соответствует задаче со степенью сложности s=m-n-1>0 [4]). Это значит, что вторичные критерии могут быть определены при исследовании как канонических, так и неканонических моделей.

В задачах оптимального управления состояниями динамических систем вместо критериев подобия могут использоваться индикаторы подобия, которые определяются масштабами величин, входящими в (1) – (2). Применение последних обеспечивает определенные преимущества. В частности, система оптимального управления становится более рациональной из-за того, что критерии подобия определяются не относительно параметров x_j , а относительно параметров управления u_j, которыми оптимизируются состояния системы и которые функционально связаны с x_j [6]. Сказанное относится к системам оптимального управления с эталонной моделью. В этом случае необходимо устанавливать подобие между системой-оригиналом и ее моделью в системе управления, а также числовые соотношения между параметрами управления оригинала u_{jop} и модели $u_{jм}$.

В [6] показано, что индикаторы подобия каждого члена задачи (1) – (2) определяются как

$$\mu_i = \frac{\mu_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \mu_{x_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f} = 1, \tag{10}$$

где μ_{a_i}, μ_{x_j}, μ_f – масштабные коэффициенты соответствующих величин.

Критерии подобия определяются по формуле (6), но, поскольку они в данном случае вычисляются в дифференциальной системе относительных единиц, то вектор **b** в отличие от (5) будет равным [3]:

$$\mathbf{b} = |b_1; b_2; \dots b_n; 1|,$$

где $b_j = \dfrac{\partial f / \partial x_j}{f_o / x_{jo}}$, $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, простого выражения для определения индикаторов подобия, аналогичного (9), получить не удается.

Как известно [1], относительно установления подобия процессов критерии подобия и индикаторы подобия являются равнозначными. Тем не менее, как видно из (10), отношение критериев подобия отдельных членов математической модели процесса и соответствующих индикаторов подобия не эквивалентны. Можно предположить, что, если параметрическое подобие проявляется через отношение критериев подобия, то оно может быть установлено также через отношение индикаторов подобия.

При условии, что целевая функция относительно параметров управления аппроксимирована полиномом вида (1)

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_{ji}},$$

индикаторы подобия для параметров управления u_j запишутся [6]

$$\mu_{u_j} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{ji}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ – алгебраические дополнения элементов α_{ji}, взятые с обратным знаком.

Если параметрическое подобие существует между параметрами управления p-м и q-м, то для них должны быть одинаковыми индикаторы подобия. С учетом (11) это условие запишется

$$\mu_{pq} = \frac{\mu_{u\,p}}{\mu_{u\,q}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}}}{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\| \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}}} = 1,$$

которое после упрощения примет вид

$$\mu_{pq} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{(\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| - \|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\|) \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}} = 1.$$

Из последнего выражения следует, что когда в исследуемом процессе имеется параметрическое подобие, то для того, чтобы оно сохранялось и в модели этого процесса, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| = \|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\|. \tag{12}$$

То есть, должны быть одинаковыми соответствующие алгебраические дополнения одноименных параметров в процессе-оригинале и в его модели.

Пример

Для ЛЭП 330 – 750 кВ потери активной мощности в них зависят от перетоков активной и реактивной мощностей, а также от потерь, обусловленных коронным разрядом (потери на корону). То есть, потери в линии определяются как [7]

$$\Delta P = \Delta P_k + \Delta P_P + \Delta P_Q, \tag{13}$$

где $\Delta P_k = k_k L U^{\alpha_{11}}$ – потери на корону; $\Delta P_P = r_o L P^2 U^{-2}$ – потери от перетоков активной мощности P; $\Delta P_Q = r_o L Q^2 U^{-2}$ – потери от перетоков реактивной мощности Q; k_k – коэффициент, который характеризует уровень потерь на корону в 1 км линии для данной конструкции фазы и данной погоде; α_{11} – показатель, который характеризует зависимость потерь на корону от напряжения U при определенных погодных условиях; r_o – удельное активное сопротивление линии.

В общем виде (13) как функция потерь от напряжения запишется:

$$\Delta P = a_1 U^{\alpha_{11}} + a_2 U^{-\alpha_{12}}, \tag{14}$$

где $a_1 = k_k L$; $a_2 = r_o L P^2 + r_o L Q^2$; $\alpha_{11} = 3 \div 8$; $\alpha_{12} = 2$.

Установим, какими должны быть оптимальные соотношения в ЛЭП между потерями на корону (первая составляющая в (14)) и нагрузочными потерями (вторая составляющая в (14)). Согласно (9)

$$\pi_{12} = \pi_1 / \pi_2 = \alpha_{12} / \alpha_{11} = 2 / \alpha_{11}. \tag{15}$$

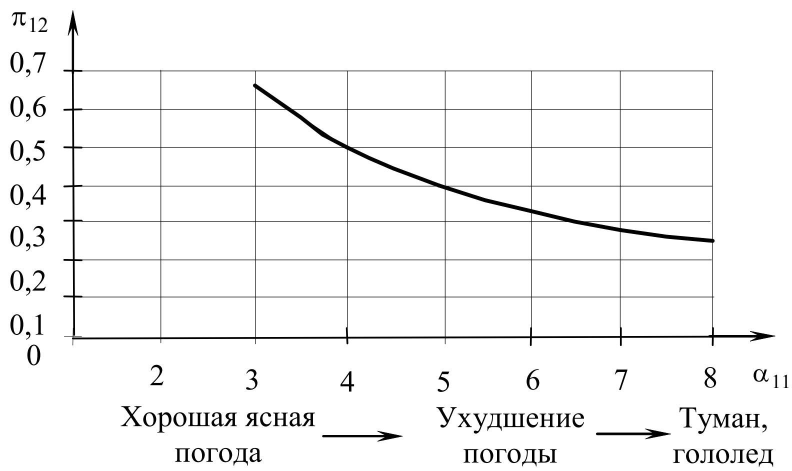

Рис 1. Оптимальное соотношение потерь в ЛЭП

Из анализа зависимости (15) видно, что оптимальное соотношение между потерями на корону и нагрузочными зависит от погодных условий. При хорошей погоде (α_{11}=3) потери на корону и нагрузочные потери в ЛЭП должны быть в соотношении 2/3 (π_{12}=0,66). С ухудшением погодных условий часть потерь на корону в суммарных потерях должна уменьшаться, а нагрузочных – возрастать. При предельных условиях (туман, гололед, α_{11}=8) π_{12}=0,25. То есть, оптимальным будет такой режим ЛЭП, когда потери на корону будут в четыре раза меньшие чем нагрузочные потери. На рис. 1 приведена зависимость между оптимальным отношением потерь на корону и нагрузочными потерями в зависимости от коэффициента α_{11} или, что тоже самое, от погодных условий, в которых эксплуатируется ЛЭП. Эта зависимость может использоваться для оптимального управления уровнями напряжения ЛЭП, а также, если это допустимо, перетоками мощности в ней.

Выводы

1. При наличии параметрического подобия в исследуемом процессе подобие может быть установлено в виде отношения соответствующих критериев подобия – вторичных критериев подобия. Значение вторичных критериев подобия может быть определено из анализа матрицы показателей степени (размерностей).

2. Индикаторы подобия в общем случае не позволяют выявить параметрическое подобия в исследуемом процессе. Они позволяют установить и достичь адекватности процессов в оригинале и в его модели. Для этого также достаточно информации, которая содержится в матрице показателей степени (размерностей) параметров, которые характеризуют процесс.

3. С помощью вторичных критериев и индикаторов подобия могут успешно решаться некоторые технические задачи. Это прежде всего оптимизационные задачи, в которых возможно и целесообразно использовать устойчивые соотношения между оптимальными значениями параметров. К таким задачам в электроэнергетике относятся, например, задачи проектирования линий электропередачи, оптимизация режимов работы линий сверхвысоких напряжений, оптимального управления нормальными режимами электрических сетей и т.п..

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веников В. А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1976. – 479 с.
2. Электрические системы. Кибернетика электрических систем. – Под ред. В. А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1974. – 328 с.
3. Лежнюк П. Д., Собчук Н. В., Казьмірук О. І. Вторинні критерії та індикатори подібності в задачах моделювання оптимальних режимів ЕЕС // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Вип. 597. “Електроенергетичні та електромеханічні системи”.– 2007. – С. 152–157.
4. Астахов Ю. Н., Лежнюк П. Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. – Киев: УМК ВО, 1989. – 140 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.
6. Астахов Ю. Н., Лежнюк П. Д. Применение теории подобия в задачах управления нормальными режимами электроэнергетических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1990. – № 5. – С. 3–11.
7. Александров Г. Н. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 360 с.

Лежнюк Петр Демьянович – д. т. н., профессор, заведующий кафедры электрических станций и систем;

Олег Юрьевич Петрушенко – соискатель кафедры электрических станций и систем;
Винницкий национальный технический университет.

Жан-Пьер Нгома – к. т. н., доцент кафедры электротехники;
Университет Дуала, Камерун.