

А. Б. Мокин, к. т. н., доц.; Б. И. Мокин, д. т. н., проф.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ НАГРУЗКИ ОТ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

Показано, почему известные методы оптимизации движения электрических транспортных средств с нагрузкой, зависящей от рельефа местности, на которой проложена железнодорожная колея, не могут быть применены для решения конкретных практических задач. Предложен подход к моделированию таких транспортных средств, пригодный для решения практических задач оптимизации их движения.

Ключевые слова: моделирование, оптимизация, электротранспорт, железнодорожный путь, рельеф местности.

Постановка задачи и исходные предпосылки

Оптимизационные задачи для транспортных средств, движущихся в течение значимых отрезков времени, всегда приходится решать в условиях зависимости траектории движения от рельефа местности. На рис. 1 показана одна из возможных траекторий такого движения от точки А, из которой транспортное средство начинает движение в момент времени t_A , до точки В, в которую это средство прибывает по графику в момент времени t_B . На этом рисунке показаны также проекции траектории движения на координатные плоскости xOy и xOz . Из рисунка видно, что от точки А к точке С имеем спуск по прямой линии, от точки С до точки D имеем закругления пути в горизонтальной плоскости, от точки D до точки М – подъем по прямой линии, от точки М до точки N опять имеем закругления пути в горизонтальной плоскости, а от точки N до точки В продолжаем движение в горизонтальной плоскости, но по прямой.

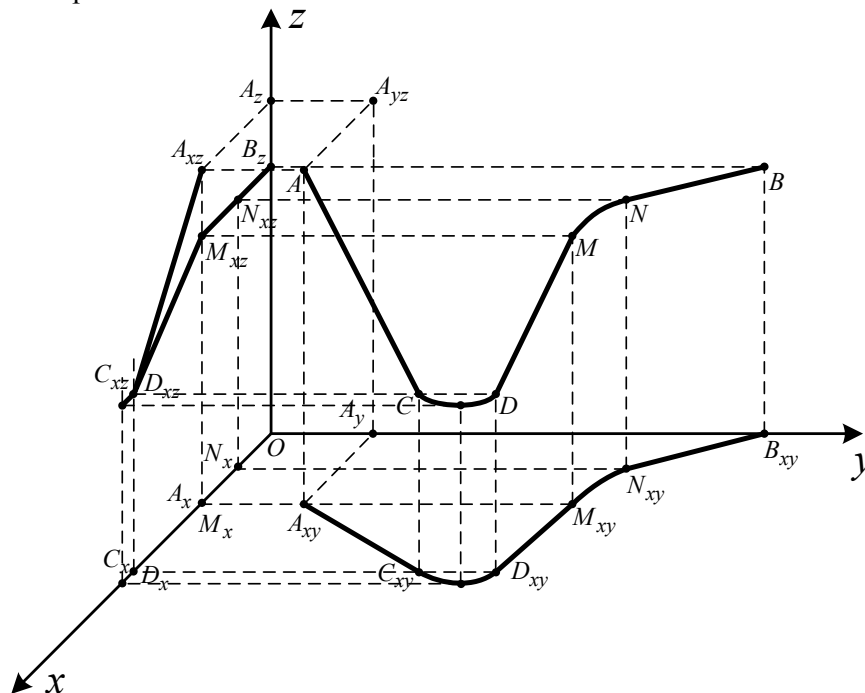


Рис. 1. Пример траектории движения транспортного средства по пути на местности со сложным рельефом

В ряде работ, например [1], раскрывается подход к решению этого класса оптимизационных задач с использованием математической модели движения транспортного средства в форме второго закона Ньютона, то есть в форме

$$m \frac{d^2 l(t)}{dt^2} = F_T(t) - F_\Gamma(l, t), \quad (1)$$

где m – масса транспортного средства, $l(t)$ – длина пути, пройденного транспортным средством от начала движения, которая зависит от времени t , а $F_T(t)$, $F_\Gamma(t)$ – соответственно, сила тяги транспортного средства и тормозная сила, действующая на транспортное средство во время движения.

Однако, как мы выяснили при попытке использовать этот подход для решения конкретной оптимизационной задачи, он не является действенным, поскольку, во-первых, тормозная сила не является константой даже при движении по горизонтальной плоскости, ведь лобовое и касательное сопротивление воздуха зависят от скорости $v(t)$ движения транспортного средства, то есть

$$F_\Gamma(l, t) = \mu_0(l, t) + \mu_1(l, t) \cdot v(l, t) + \mu_2(l, t) \cdot (v(l, t))^2, \quad (2)$$

во-вторых, значение тормозной силы зависит также и от того, движется транспортное средство по горизонтальной плоскости или преодолевает подъем или спуск, а в-третьих, пройденный путь при наличии подъемов, спусков и поворотов становится функцией декартовых координат x, y, z (рис. 1), что при аппроксимации их функциями времени вида

$$\begin{cases} x(t) = x_a f_x(t), \\ y(t) = y_a f_y(t), \\ z(t) = z_a f_z(t) \end{cases} \quad (3)$$

приводит к появлению в выражениях, которыми моделируется пройденный путь, нелинейной зависимости от их производных, поскольку

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{dt}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{dt}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{dt}\right)^2} dt, \quad (4)$$

$$l(t) = \int_{t_A}^t \sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{d\tau}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{d\tau}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{d\tau}\right)^2} d\tau, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{x_a^2 \frac{df_x}{dt} \cdot \frac{d^2 f_x}{dt^2} + y_a^2 \frac{df_y}{dt} \cdot \frac{d^2 f_y}{dt^2} + z_a^2 \frac{df_z}{dt} \cdot \frac{d^2 f_z}{dt^2}}{\sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{dt}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{dt}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{dt}\right)^2}}. \quad (6)$$

Вполне очевидно, что оптимизацию движения по критерию минимума затрат электроэнергии E электровозом, на электропривод которого подается из контактной сети напряжение $u(t)$, создающее ток $i(t)$, то есть по критерию минимума выражения

$$E = \int_{t_A}^{t_B} u(t) i(t) dt, \quad (7)$$

предложенного в работе [2], при условии выполнения программы движения между

остановками в точках A и B (рис. 1)

$$l_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} v(x, y, z, t) dt \quad (8)$$

и ограничения (1), в котором используются соотношения (2) – (6), невозможно осуществить так, чтобы можно было построить аналитическую математическую модель для тока $i(t)$ электропривода электровоза, который обеспечивает минимум критерия (7) при выполнении программы (8). Невозможно построить единую аналитическую модель для этого тока и при использовании моделей динамики электропоезда в виде, приведенном в работах [3, 4]. Поэтому поиску такого подхода, который позволяет построить вышеуказанную аналитическую математическую модель, и посвящена данная статья.

Решение поставленной задачи

Из ведомственных методик прокладки железнодорожного пути на поверхности со сложным рельефом известно, что путейщики обязаны прокладывать закругления пути на горизонтальных участках земной поверхности, а спуски и подъемы выполнять прямолинейными. А правила эксплуатации путевых транспортных средств требуют закругления пути проходить с постоянной скоростью, значение которой обеспечивает несхождение ни одного из вагонов с колеи и их непереворачивание. Следовательно, опираясь на эти методики и правила, можно утверждать, что целесообразным является декомпозиция задачи оптимизации движения путевого транспортного средства по поверхности со сложным рельефом на совокупность подзадач оптимизации движения этого средства на прямолинейных горизонтальных участках (отрезок NB на рис. 1), на закруглениях в горизонтальной плоскости (дуги MN и CD на рис. 1), на прямолинейных подъемах (отрезок DM на рис. 1) и прямолинейных спусках (отрезок AC на рис. 1), накладывая при этом условия единообразия тех значений параметров движения в точках стыка обозначенных отрезков и дуг, обеспечивающих не только гладкость траектории движения от стартовой (точка A на рис. 1) до конечной (точка B на рис. 1) станций, но и гладкость кривых, отражающих график скорости движения транспортного средства от точки A к точке B , поскольку ощутимые линейные размеры транспортного средства и наличие как минимум двух пар колес делают невозможным появление точек слома на непрерывной траектории его движения, а ощутимая масса делает невозможным скачкообразное изменение его скорости.

Известно, что гладкой называется непрерывная функция с непрерывной первой производной. Поэтому траектория движения транспортного средства будет гладкой функцией только в том случае, когда ее первая производная, то есть скорость движения будет представлять собой непрерывную функцию. В свою очередь скорость движения транспортного средства будет гладкой функцией только в том случае, когда ее первая производная, то есть ускорение, тоже будет представлять собой непрерывную функцию.

Поэтому для приведенной на рис. 1 траектории движения от точки A к точке B условием ее гладкости будет выполнение соотношений:

$$\begin{cases} v_{AC}(C) = v_{CD}(C); \\ v_{CD}(D) = v_{DM}(D); \\ v_{DM}(M) = v_{MN}(M); \\ v_{MN}(N) = v_{NB}(N), \end{cases} \quad (9)$$

в которых двойной нижний индекс возле символа скорости указывает на то, каким участком траектории транспортное средство приближается к точке, указанной в скобках, а условием гладкости скорости движения транспортного средства по этой траектории будет

выполнение соотношений:

$$\begin{cases} \frac{dv_{AC}}{dt}(C) = \frac{dv_{CD}}{dt}(C); \\ \frac{dv_{CD}}{dt}(D) = \frac{dv_{DM}}{dt}(D); \\ \frac{dv_{DM}}{dt}(M) = \frac{dv_{MN}}{dt}(M); \\ \frac{dv_{MN}}{dt}(N) = \frac{dv_{NB}}{dt}(N), \end{cases} \quad (10)$$

в которых имеет место та же символика, но в отношении производных скорости.

Поскольку для однозначности определения траектории движения необходимо задавать его значение на границах участка движения, то соотношения (9), (10) необходимо дополнить соотношениями:

$$\begin{cases} v(A) = v_A; \\ v_{NB}(B) = v_B \end{cases} \quad (11)$$

– для скоростей, в которых v_A, v_B их конкретизированные числовые значения, и соотношениями

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(A) = v_A^1; \\ \frac{dv_{NB}}{dt}(B) = v_B^1 \end{cases} \quad (12)$$

– для ускорений, в которых v_A^1, v_B^1 также их конкретизированные числовые значения.

Для унификации дальнейших размышлений конкретизируем места размещения точек A и B . Для наземных железнодорожных электропоездов эти точки удобно размещать в местах установки семафоров, причем точку A будем размещать на выходном семафоре стартовой станции, а отсчет времени t_A будем начинать в момент прохождения семафора хвостом последнего вагона электропоезда, а точку B будем размещать на входном семафоре конечной станции, а отсчет времени t_B будем начинать в момент достижения семафора лобовой частью тягового электровоза. Что касается подземных электропоездов метрополитенов и наземных городских трамваев, то точку A для них будем привязывать к исходному срезу стартовой посадочной платформы и отсчет времени t_A будем начинать с момента прохождения выходного среза стартовой посадочной платформы хвостом последнего вагона, а точку B будем привязывать к входному срезу конечной посадочной платформы и отсчет времени t_B будем начинать с момента достижения входного среза конечной посадочной платформы лобовой частью первого вагона.

Из вышеизложенного следует, что задачу оптимизации движения электропоезда от стартовой станции до конечной, сформулированную для общего случая траектории движения, представленного на рис. 1, целесообразно решать путем оптимизации движения на отдельных участках пути (AC, CD, DM, MN, NB) при условии выполнения ограничений (9) – (12). И начинать решение этой задачи нужно с оптимизации движения на закруглениях (CD, MN), исходя из того, что основным критерием оптимальности при движении электрического транспортного средства по закруглениям пути, проложенным на горизонтальной плоскости, является запас несхождения, который обеспечивается непревышением скорости движения этим транспортным средством допустимого значения, определенного из условий схода с рельсов вагона с наиболее высоко размещенным нечетко определенным центром массы. Поэтому на этом этапе с учетом еще и того, что закругления

электрические транспортные средства проходят с постоянной скоростью, мы находим конкретные значения ограничений (9), (10), причем вполне очевидно, что скорости в определенных точках будут константами, а ускорения – нулевыми.

Вторым этапом решения поставленной задачи является определение ограничений (11), (12). При этом необходимо учитывать то, что скорость и ускорение электрического транспортного средства на семафоре стартовой станции задаются ее технологическими службами, а скорость и ускорение этого же транспортного средства на семафоре конечной станции находятся из уравнений динамики при условии его остановки на определенном отрезке посадочной платформы.

На третьем этапе решается задача оптимизации движения электрического транспортного средства на прямолинейном отрезке пути (NB), проложенном на горизонтальной плоскости. При этом вместо ограничений (1), (2), (8) уже можно использовать более простые:

$$m \frac{d v(t)}{dt} = F_T(t) - F_r(v, t), \quad (13)$$

$$F_r(v, t) = \mu_0 + \mu_1 v(t) + \mu_2 (v(t))^2, \quad (14)$$

$$l_{NB} = \int_{t_N}^{t_B} v(t) dt. \quad (15)$$

На четвертом этапе решается задача оптимизации движения электрического транспортного средства во время его спуска (прямолинейный отрезок пути AC) и во время его подъема прямолинейный отрезок пути DM).

При этом, что касается тяговой и тормозной сил в моделях (13), (14), нужно учесть все те особенности, которые раскрыты по отношению к ним в работе [4], а ограничение (15) сформировать в виде

$$l_{AC} = \int_{t_A}^{t_C} v(x_A, x_C, y_A, y_C, z_A, z_C, t) dt, \quad (16)$$

$$l_{DM} = \int_{t_D}^{t_M} v(x_D, x_M, y_D, y_M, z_D, z_M, t) dt, \quad (17)$$

где декартовы координаты конечных точек задают длину соответствующего отрезка пути в пространстве.

Выводы

1. Показано, почему известные методы оптимизации движения электрических транспортных средств с нагрузкой, зависящей от рельефа местности, на которой проложена железнодорожная колея, не могут быть применены для решения конкретных практических задач.

2. Предложен подход к моделированию движения электрических транспортных средств, пригодный для решения практических задач оптимизации движения, основанный на декомпозиции задачи оптимизации движения вдоль всей траектории на совокупность подзадач оптимизации движения на участках, ограниченных точками смены режима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Ю. П. Оптимальное управление движением транспортных средств / Ю. П. Петров. – Л.: Энергия, 1969. – 96 с.
2. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з Наукові праці ВНТУ, 2010, № 1

урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28 – 33.

3. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 55 – 58.

4. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 2) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 1. – С. 28 – 33.

Мокин Александр Борисович – к. т. н., доцент кафедри електромеханических систем автоматизации в промышленности и на транспорте, докторант кафедры e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокин Борис Иванович – д. т. н., профессор кафедры електромеханических систем автоматизации в промышленности и на транспорте, ректор ВНТУ, тел.: (0432) 56-08-48.

Винницкий национальный технический университет.