УДК 681.3:624.15

А. С. Моргун, д. т. н., проф.; А. В. Ницевич; И. Н. Меть

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ВЛИЯНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ УЧЕТЕ ДЕЙСТВИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В статье исследовано влияние появления горизонтальных перемещений вот действия вертикального и горизонтального нагружения на сваи и целесообразность учета в численном расчете за МГЕ радиальных напряжений на величину несущей способности сваи.

***Ключевые слова**: напряженно-деформированное состояние, грунты, численное моделирование, метод граничных элементов.*

Введение

Острая социальная необходимость в объектах социально-бытового назначения нуждается в увеличении объемов жилого и гражданского строительства. Рост объемов строительства возможен при рациональном использовании денежных, трудовых и материальных ресурсов. Как известно, сметная стоимость строительства фундаментов достигает около 40% общей стоимости здания. В промышленном и гражданском строительстве Украины, благодаря ее геологическим условиям, целесообразно применять сваевые фундаменты. И не смотря на широкое применение сваевых фундаментов, особенно в высотном строительстве, особенности их взаимодействия с основаниями и теоретические методы расчета свай изучены недостаточно с точки зрения принятия экономических и надежных проектных решений. В значительной мере это объясняется сложностью процессов, которые проходят в почве при погружении свай, и особенностями взаимодействия свай с основаниями. В результате недостаточного изучения этих явлений в проектной практике используют относительно простые модели, которые очень приблизительно отображают действительные процессы взаимодействия свай с основаниями. Это приводит к принятию несовершенных решений.

Анализ последних достижений

Интенсивное развитие и широкое применение ЭВМ существенно сблизили фундаментальные математические проблемы с прикладными, усилили их взаимовлияние.

Появление нового мощного метода исследований – числового эксперимента – как никогда раньше тесно связало физическое содержание задачи, математическое формулирование и числовой способ решения. Проблемы прогноза поведения сваевого фундамента можно решить, используя современные числовые методы и современные ЭВМ.

Среди современных числовых методов выделилась основная группа решения краевых задач строительной механики и механики твердого деформированного тела – метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). МКЭ в настоящее время является одним из наиболее популярных численных методов решения задач механики сплошных сред. МКЭ привлек к себе внимание исследователей главным образом тем, что сплошная среда разбивается на ряд элементов, которые можно рассмотреть как отдельные ее части. В этом численном методе реализуется предложенная Пуассоном идея – решение задачи о напряженно-деформированном состоянии сложной конструкции путем представления ее из элементарных фрагментов.

МГЭ – альтернативный подход, который использует поверхностную дискретизацию исследуемого объекта, поэтому для трехмерных задач фундаментостроения этот метод более эффективный. Решение конкретной задачи за МГЭ возможно при условии наличия соответствующего фундаментального решения (точной или приближенной функции Грина). Задача сводится к преобразованию исходных расчетных дифференциальных уравнений к

интегральному уравнению, решение которого намного проще. Такая операция позволяет получить систему алгебраических уравнений, которая относится к границе области.

Постановка задачи, определяющие соотношения

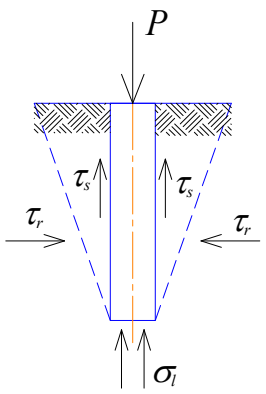

Рис.1. Напряжённое состояние сваи от воздействия вертикальной нагрузки

В статье за численным методом граничных элементов исследуется осесиметрическая задача определения напряженно-деформированного состояния и несущей способности сваи при погружении ее в почву вертикальной нагрузкой. В общем случае по боковой поверхности призматической или пирамидальной сваи и под острием возникает напряженное состояние (рис.1) :

касательные напряжения τ_s по боковой поверхности сваи,

τ_τ - радиальные напряжения по боковой поверхности,

σ_l – нормальные напряжения под острием сваи.

От действия единичных величин этих напряжений будут возникать перемещения точек боковой поверхности и острия, которые определялись по фундаментальным решениям Миндлина для полупространства [1]. Величины этих перемещений (от единичных значений напряжений) составляют матрицу влияния МГЭ $K_{i,j}$, которая с точки зрения строительной механики представляет собой классическую матрицу податливости, т.е. матрицу, обратную к матрице жесткости.

Интегральное граничное уравнение равновесия сваи в почве, полученное К. Бреббия [2] имеет вид :

$$C_{ij}(\xi)\cdot U_j(\xi)+\int_{\Gamma}\rho^*_{ij}(\xi,x)\cdot U_j(x)\partial\Gamma(x)=\int_{\Gamma}U^*_{ij}(\xi,x)\cdot\rho_j(x)\partial\Gamma(x)+\int_{\Gamma}U^*_{ij}(\xi,x)\cdot b_j(x)\partial\Omega(x) \quad (1)$$

где $U^*_{ij}(\xi,x)$, $\rho^*_{ij}(\xi,x)$ – перемещение и напряжение, которые возникают в точке x в j-м направлении от единичной сосредоточенной силы, действующей в i-м направлении и приложенной в точке ξ (фундаментальные решения Миндлина для полупространства);

$U_j(x)$, $\rho_j(x)$ – перемещение и напряжения, которые возникают на границе тела (т.е. на боковой поверхности и на поверхности нижнего конца сваи).

Матричный вид (1):

$$[K]_{ij}\cdot\{\Phi\}_j=\{W\}_i, \quad (2)$$

где $[K]_{ij}$ – глобальная матрица коэффициентов влияния, которые учитывают взаимодействие сваи с основанием.

В данном классе задач матрица [K] всегда не сингулярна с преобладающими диагональными коэффициентами; $\{W_e\}$ – вектор-столбец свободных членов системы линейных алгебраических уравнений; с физической точки зрения это заданные перемещения точек боковой поверхности сваи и точек плоскости нижнего конца сваи; $\{\Phi\}$ – вектор-столбец неизвестных, которые в общем случае вычисления сопротивления сваи определяют касательные напряжения $(\tau_s)_и$ (n=1,…n1), радиальные напряжения $(\tau_\tau)_и$ (n=1,…n1) и нормальные напряжения (σ_l) (n=2n1+1…n).

В развернутом виде (2) можно представить :

$$\begin{Bmatrix} W_S \\ U_S \\ W_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} K_{SS} & K_{RS} & K_{BS} \\ K_{SU} & K_{RU} & K_{BU} \\ K_{SB} & K_{RB} & K_{BB} \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \tau_S \\ \tau_R \\ \sigma_l \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где K_{SS} – матрица вертикальных перемещений точек боковой поверхности сваи от касатель-

ных напряжений по боковой поверхности τ_s. Точка прикладывания единичной нагрузки ξ на боковой поверхности по вертикале, точка наблюдения X тоже на боковой поверхности;

K_{BS} – матрица вертикальных перемещений точек боковой поверхности сваи от нормальных напряжений острия σ_l . Точка ξ на острие по вертикале, точка X на боковой поверхности;

K_{SB} – матрица вертикальных перемещений точек острия от τ_s. Точка ξ на боковой поверхности по вертикале, точка X на острие;

K_{BB} – матрица вертикальных перемещений точек острия от σ_l. Точка ξ на острие по вертикале, точка X на острие;

K_{RS} – матрица, которая включает коэффициенты матрицы влияния на вертикальные перемещения узлов боковой поверхности сваи при загружении элементов боковой поверхности радиальными напряжениями τ_r. Точка ξ на боковой поверхности по горизонтали, точка X на боковой поверхности;

K_{SU} – матрица, коэффициенты которой отображают связь между горизонтальными перемещениями узлов боковой поверхности сваи, когда боковая поверхность нагружена вертикальными напряжениями. Точка ξ на боковой поверхности по вертикале, точка X на боковой поверхности;

K_{RU} – матрица, которая включает коэффициенты влияния, которые отображают зависимость между горизонтальными перемещениями узлов боковой поверхности сваи при загружении элементов боковой поверхности горизонтальными напряжениями τ_r. Точка ξ на боковой поверхности по горизонтали, точка X на боковой поверхности;

K_{BU} – матрица, коэффициенты которой отображают зависимость горизонтальных перемещений узлов боковой поверхности сваи при загружении элементов нижнего конца вертикальными напряжениями σ_1. Точка ξ на острие по вертикале, точка X на боковой поверхности;

K_{RB} – матрица, коэффициенты которой отображают связь между вертикальными перемещениями узлов нижнего конца сваи при загружении элементов боковой поверхности радиальными напряжениями τ_r. Точка ξ на боковой поверхности по горизонтали, точка X на острие.

В уравнениях (2)-(3), которые на этапе дискретизации записываются для каждого граничного узла острия и боковой поверхности сваи, неизвестными есть напряжения на поверхности сваи (τ_s, τ_r, σ_l), граничные условия задаются перемещениями узлов на поверхности сваи (W_s, U_s, W_b).

Наиболее трудоемкой частью решения является вычисление коэффициентов подматриц $(K)_{ij}$. Коэффициенты этих подматриц исчисляются численным интегрированием решения Миндлина с помощью квадратурных формул Гаусса.

С целью учета в численном расчете за методом граничных элементов влияния на несущую способность свай наличия трех видов напряжений по боковой поверхности и острию τ_s, τ_r, σ_l была проведена компоновка матрицы влияния МГЭ для пирамидальной сваи длиной 2,7 м (60x60) (7x7) и проанализировано влияние ее составляющих на конечный результат. Матрица влияния компоновалась согласно аналитическим решениям Р. Миндлина по определению напряженно-деформированного состояния в полупространстве при действии в нем единичного источника (P=1) как по вертикали, так и по горизонтали. В расчете принималось, что свая абсолютно жесткая и перемещение узлов пирамидальной сваи, расположенных на боковой поверхности и нижнем конце сваи, равно перемещению головы сваи. В расчете сопротивления пирамидальной сваи величина W_e принималась равной величине перемещения, при которой имеет место линейная зависимость между сопротивлением сваи и ее перемещением. Как показывает анализ экспериментальных исследований сопротивления одиночных пирамидальных свай, величину W_e в пределах линейной зависимости в первом приближении можно принять равной 1 – 1,5 см.

Для решения задачи боковая поверхность и острия пирамидальной сваи дискретизировались десятью граничными элементами. Проводилась линейная аппроксимация напряжений по длине каждого граничного элемента. Для каждого граничного узла записывалось уравнение (2), что привело к образованию системы линейных алгебраических уравнений пятнадцатого порядка. Для числовой реализации задачи составлена программа на алгоритмическом языке Pascal. В программе корни СЛАУ находились по методу единого деления Гаусса.

В результате решения системы алгебраических уравнений получены значения касательных напряжений τ_s, радиальных напряжений τ_r на боковой поверхности пирамидальной сваи и нормальных напряжений на плоскости нижнего кольца σ_l. После определения напряжений была получена сила сопротивления сваи под нижним концом ($P_{острия}$), сила сопротивления сваи по боковой поверхности сваи ($P_б$) и общая несущая способность сваи:

$$P_z = \int_L 2\pi\alpha\tau_s dh_l + \int_0^{a_n} 2\pi \in \sigma_l dh_2 \,, \qquad (4)$$

где a_n – радиус пирамидальной сваи в рамках боковой поверхности; h_1 – высота граничного элемента по боковой поверхности; е – радиус острия, h_2 – высота граничного элемента по острию сваи.

Коэффициенты матрицы влияния К приведены на рис. 2 а, б, в. Они представляют собой линии влияния:

вертикальных перемещений боковой поверхности (рис .2, а),

горизонтальных перемещений боковой поверхности (рис. 2, б),

вертикальных перемещений острия (рис. 2, в) от действия единичных значений τ_s, τ_r, σ_l.

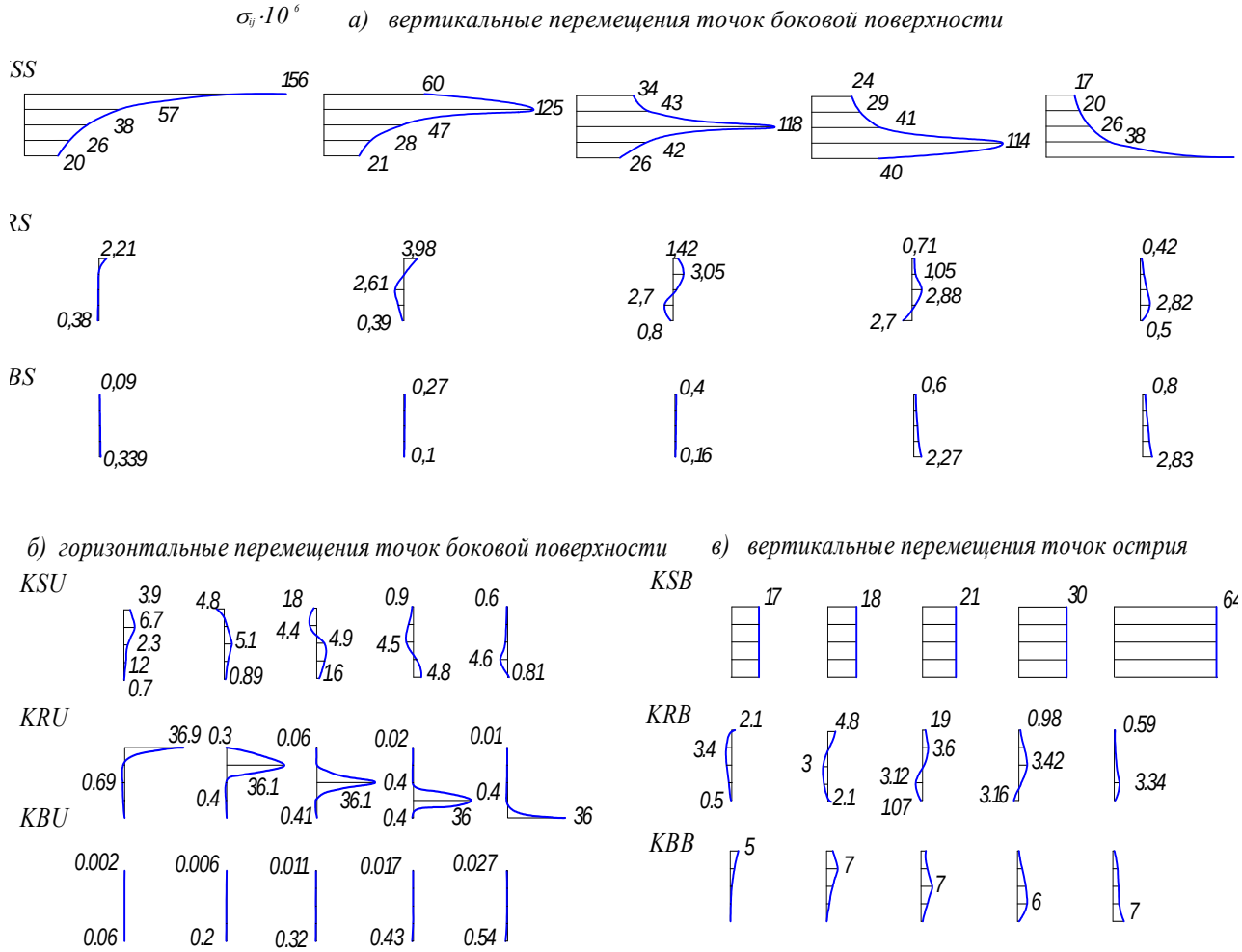

Рис. 2. Коэффициенты матрицы влияния МГЭ

Из численного анализа коэффициентов K_{ij} необходимо отметить (рис. 2), что наибольшее влияние на несущую способность сваи осуществляют вертикальные перемещения от действия касательных напряжений τ_s. Ординаты этих линий влияния на два порядка больше ординат перемещений от действия нормальных напряжений σ_l острия сваи. Значительны ординаты горизонтальных перемещений от действия радиальных напряжений τ_r.

Численный анализ коэффициентов также показывает, что линии влияния перемещений от горизонтальных сил τ_r все имеют участки с положительными и отрицательными значениями ординат и при их учете дают меньшие значения коэффициентов матрицы влияния K_{ij}. При определении несущей способности сваи такая матрица K_{ij} дает ожидаемую величину несущей способности сваи – 282 кН. Экспериментальные данные [3] – 280 кН. Проведен также численный эксперимент при неучете в матрице влияния K_{ij} действия радиальных напряжений τ_r. Матрица K_{ij} в этом случае состоит из из четырех подматриц:

$$\begin{vmatrix} K_{SS} & K_{BS} \\ K_{SB} & K_{BB} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Несущая способность сваи в этом случае составила 272 кН. Поскольку зависимость между несущей способностью сваи, которая является интегральным выражением напряжений (4) и коэффициентами матрицы K_{ij} обратная (1), то меньшим значениям матрицы K_{ij} отвечает большая несущая способность.

Выводы

1. В численных расчетах НДС свай от действия вертикальных нагрузок учет в матрице влияния всех девяти подматриц дает результат более близкий к эксперименту, приближает результат моделирования к действительной картине.
2. Неучет влияния горизонтальных напряжений τ_r при вертикальной нагрузке свай (матрица K_{ij} состоит из четырех подматриц) прогнозирует заниженную несущую способность, т.е. в запас прочности в пределах 3 – 4%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моргун А.С. Метод граничних елементів в розрахунках паль. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ – Вінниця ", 2000. – 132 с.
2. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1984. – 248 с.
3. Хазин В.И. Экспериментальные исследования зависимости несущей способности пирамидальных свай от угла коничности. Основания и фундаменты, Выпуск 5. – К.: Будівельник. – С. 124 – 128.

Моргун Алла Серафимовна – заведующий кафедрой;

Ніцевич Андрей Витальевич – магистрант кафедры;

Меть Иван Николаевич – магистрант кафедры.

Кафедра промышленного и гражданского строительства, Винницкий национальный технический университет