

**Петрика Визуреану, д. э. н.**

## **ТЕРМОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В АВТОМОБИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

*Для конструктивно-функционального улучшения оборудования, применяемого для термической обработки металлических сплавов, используемых в автомобильной промышленности, первостепенное значение приобретает теоретический анализ термофизических явлений, происходящих при высоких температурах в камере печи электрического резистивного разогрева, поскольку именно этот тип печей наиболее часто используется для тепловой обработки металлов и сплавов.*

*В электропечах резистивного направленного разогрева представлены все три вида теплопереноса. Для резистивных печей при высоких температурах основными путями теплопереноса являются теплопроводность и излучение. Конвекционный теплоперенос практически не может быть принят в расчет для этих печей как самостоятельный механизм по сравнению с двумя другими, указанными выше.*

**Ключевые слова:** *теплопередача, тепловое излучение, метод граничных элементов, тепловой баланс, уравнение.*

### **Введение**

Теплопроводность обеспечивает передачу тепла от более нагретых участков к другим, менее нагретым деталям того же узла или к другим узлам, находящимся с ними в прямом контакте; в печах резистивного разогрева это проявляется передачей тепла через теплоизолированные стенки печи, резистивные элементы, оснастку, детали и приборы, представляющие собой оборудование камеры.

Тепловое излучение, в отличие от теплопроводности, не требует наличия материальной среды для распространения тепла. Наоборот, чем выше вакуум, тем оно более эффективно. Это излучение представляет собой определенное электромагнитное излучение, исходящее от нагревателя при определенной температуре и обеспечивающее теплообмен между различными поверхностями как внутри печи, так и между внешними стенками и окружающей средой.

В большинстве случаев используемые при термообработке газовые среды не принимают участия в теплообмене путем абсорбции или эмиссии, следовательно, их можно рассматривать как идеально прозрачную среду. Эта точка зрения основана на том, что некоторые газообразные компоненты с симметрически неполярной молекулярной структурой ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ) прозрачны по своей природе.

С другой стороны, поверхности внутри печи нельзя рассматривать как зеркала, поскольку они излучают в определенном направлении пропорционально косинусу угла между направлением излучения и нормалью к излучающей поверхности.

Изолирующие материалы с теплоотражательными свойствами, сопротивления и другие аксессуары обладают довольно шероховатой поверхностью, чтобы их можно было характеризовать излучающей или отражательной способностью, исследуя их шаг за шагом по различным направлениям диффузного излучения. Кроме того детали, которые обрабатывают с помощью температуры, испытывают поверхностное окисление в случае термообработки в воздушной среде. Гипотеза диффузного излучения – это лишь частный случай, дающий представление об имеющих здесь место сложных физических явлениях.

Реальные поверхности печи, принимающие участие в радиационном теплообмене, в равной мере могут быть как излучателями, так и поглотителями излучения независимо от длины волны (т. н. серые поверхности).

Другое предположение, принимаемое во внимание при рассмотрении радиационного

теплообмена в электропечах резистивного нагрева, заключается в том, что теплоизолирующие поверхности считаются непрозрачными и изотермическими.

Теплообмен посредством излучения представляет собой основной способ подачи тепла в печи с косвенным резистивным нагревом, особенно при высоких температурах обработки или в печах с высокой удельной мощностью.

Естественная конвекция вызвана потоком газа в результате разности плотностей, обусловленной самой теплопередачей. Она является не прямой передачей тепла от более нагретых сред к менее нагретым и вместе с излучением участвует в потерях тепла через стенки печи в окружающее пространство. В отличие от теплопередачи излучением, конвекция тепла имеет определенное влияние только в начале цикла термообработки, когда печь холодная. Когда поверхность нагревается, доля конвекции в теплопередачу становится незначительной.

Электропроводность резисторов зависит от материала, из которого сделан резистор, и его температуры.

### **Использование метода конечных элементов и конечных разностей при решении задач теплообмена**

Использованию метода конечных разностей при решении задач теплообмена должна предшествовать оцифровка конечных элементов для создания тепловой модели [1]. Тестирование тепловой модели производится аналогично тестированию электрической модели.

Уравнения теплопередачи аппроксимируются посредством линейных дифференциальных уравнений в частных производных типа [2]:

параболических, вследствие их природной зависимости от времени; требуются определенные условия для пространственной (граничные условия) и временной (характеризирующей переходные процессы) частей;

эллиптических, вследствие их природной зависимости от пространственных условий и решений, независимых от времени (характеризируют стационарные режимы).

Исходя из этого, проблема создания тепловых моделей основывается на принципах оцифровки в двух аспектах:

- пространственной геометрической оцифровки ( $i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z$ );
- временной оцифровки ( $n\Delta t$ ).

Термальный узел определяется по геометрическому центру тяжести созданного конечного элемента. Общая масса узла считается сосредоточенной в термическом узле.

Пространственная оцифровка.

Исходя из конкретных особенностей каждого применения, оцифровка твердых тел, независимо от их геометрической формы, может быть выполнена различными способами. Основные способы оцифровки базируются на следующих критериях:

- каждый контрольный объем, контрольная поверхность или  $i$ -ая контрольная точка ассоциируется с термальным узлом;
- в каждом термическом узле должна сохраняться тепловая энергия.

Для промышленных электрических печей наиболее адекватным способом оцифровки в конечных элементах является плоскость теплового обмена.

Треугольная оцифровка [1].

Для внутренних узлов:

Термальный узел создается в центре тяжести треугольника (точка пересечения медиан). Следовательно, градиент температуры направлен перпендикулярно границе, разделяющей два соседних элемента, находящихся при разных температурах. Этот тип модели позволяет легко определить температурную проводимость между узлами и, к тому же, данная модель обеспечивает намного большее количество степеней свободы теплового потока. Центробежный термобаланс каждого узла соответствует термическому элементу (рис. 1).

Для узлов с граничными условиями (конвекция и/или радиация):

В этом типе модели принимаются во внимание особые пространственные (граничные)

условия. В этих условиях на границе теплообмена с окружающей средой уравнения теплового баланса будут:

$$\Phi_{i,conduction} = \Phi_{convection} + \Phi_{radiation}. \tag{1}$$

Линейная однонаправленная оцифровка.

В данном случае применяется точечная оцифровка с одной степенью свободы. Эта оцифровка часто используется для анализа термальной проводимости через изолированные стенки промышленных печей, форма и размеры которых могут допускать аппроксимацию в виде теплопроводности через плоскую плиту.

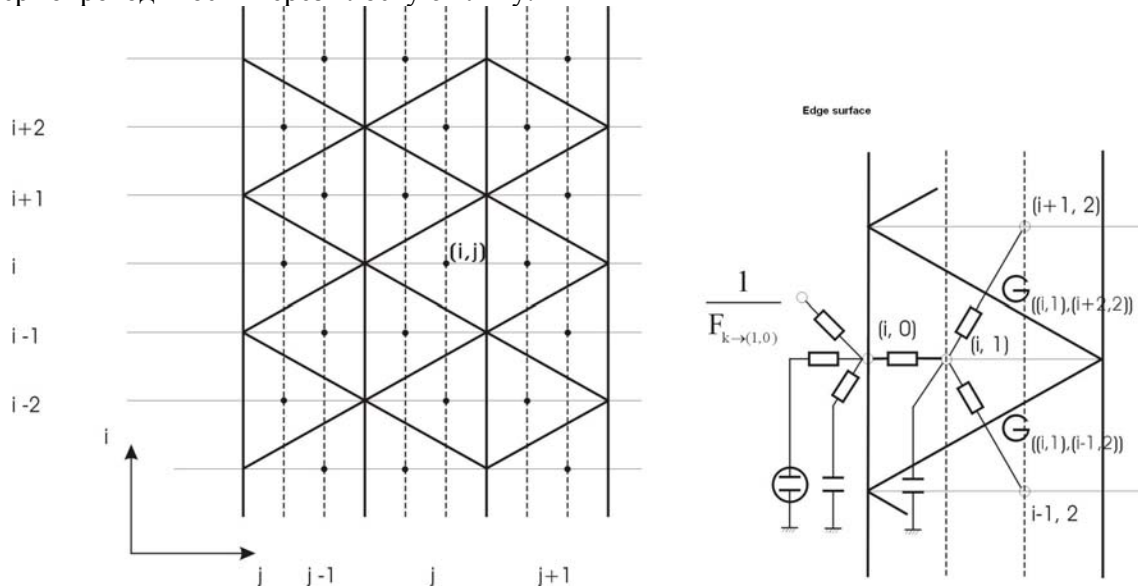


Рис. 1. Пространственная оцифровка в виде треугольных элементов и эквивалентная электрическая схема [1]

Оцифровка вдоль оси времени.

С учетом выбранной методологии вычислений проверяются на критерий совпадения такие формы временной оцифровки [1]:

Определение величины неизвестного параметра в конкретной форме:

$$\theta_i(t_{n+1}) = f[\theta_i(t_n)]. \tag{2}$$

Это означает прямое вычисление температуры, центрированной к пространственному термальному узлу в определенный момент времени ( $t_n$ ) в предположении, что значения температуры в предыдущий момент ( $t_n$ ) известны (рис. 2). В этом случае условием стабильности минимума будет:

$$\frac{\Delta t}{(\Delta l)^2} \leq \frac{1}{2} \text{ (при решении случая конечных разностей).}$$

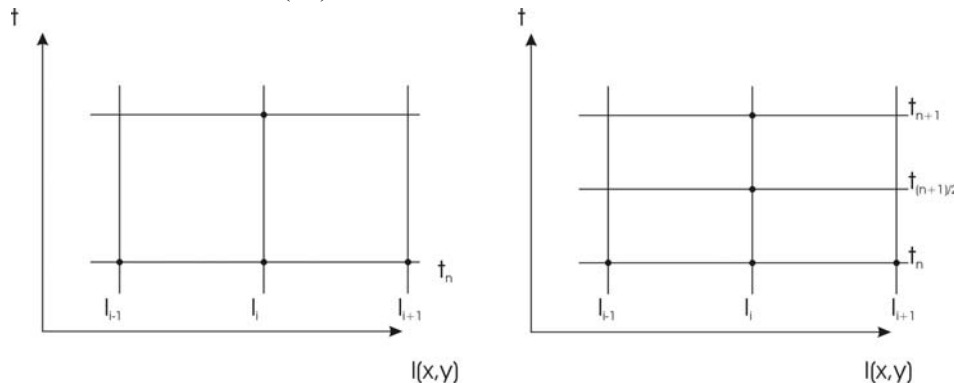


Рис. 2. Временная оцифровка [1]

Определение величины неизвестного параметра в конкретной форме при быстром увеличении скорости выравнивания температуры (метод Кранка – Николсона).

Этот метод уменьшает зависимость от выбранного интервала приращения времени increment  $\Delta t$  и не зависит от значения задержки отражения  $\Delta t / (\Delta l)^2$ .

Использование эксплицитного выражения для дифференциального уравнения обеспечивает контроль условий стабильности решений и постоянную коррекцию значения задержки для следующего временного интервала.

#### Теплопередача при процессах термообработки в оборудовании с электрорезистивным нагревом

При анализе теплопередачи в любой замкнутой системе используется уравнение энергетического баланса, которое соответствует закону сохранения энергии:

$$\frac{dE_i}{dt} + \frac{dE_g}{dt} = \frac{dE_e}{dt} + \frac{dE_a}{dt}, \quad (3)$$

где  $dE_i / dt$  – энергия, поступающая в систему за единицу времени;  $dE_g / dt$  – энергия, производимая системой за единицу времени; энергия,  $dE_e / dt$  – покидающая систему за единицу времени;  $dE_a / dt$  – энергия, аккумулируемая системой за единицу времени;

Теплообмен путем теплопроводности.

Уравнение теплопроводности в материальной среде с термической проводимостью, плотностью и массовым нагревом имеет выражение:

$$div(-\lambda grad T) + \gamma c dT/dt = P, \quad (4)$$

где  $P$  представляет объемную мощность, рассеиваемую в материал.

Интегрируя это уравнение по  $i$  элементарных объемов, которые окружают  $j$  ближайших к ним, получаем численное выражение, представляющее термобаланс  $V$ :

$$C_i \frac{d\theta_i}{dt} = \Phi_i + \sum_j G_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad (5)$$

где  $G_{ij}$  – теплопроводность между элементами  $i$  и  $j$  [W/K];  $C_i = \gamma_i c_i V_i$  – теплоемкость  $i$ -го элемента, соответственно сохраняющего теплоту при повышении температуры со скоростью [Wh/k];  $\Phi_i = P_i V_i$  – энергия, производимая  $i$ -тым элементом [W].

Термальный узел определяется геометрическим элементом, материальная масса которого сосредоточена в центре его тяжести. На плоской поверхности этот узел находится на пересечении медиан сторон геометрического элемента. Это позволяет создать сеть точек теплопроводности. С другой стороны, температурный градиент, полученный в результате разницы температур между центром узла и серединой отрезка, отделяющего эту зону от следующей, всегда перпендикулярен этой зоне, разделяющей два элемента.

Термальный баланс, рассматриваемый в качестве термического узла, соответствует балансу на элементе приращения, следовательно, используемый метод представляет собой узловый метод, при котором сохраняется термальная энергия.

Термальные узлы связаны между собой теплопередачей, которая может осуществляться через теплопроводности, конвекцию или излучение.

Источники тепла расположены в термальном узле. Положение узла зависит от геометрической формы элемента. Это может быть не совсем удобным, если треугольный элемент имеет прямой угол (узел будет на гипотенузе) или тупой (узел будет находиться вне элемента). Наиболее часто используемыми элементами являются равносторонние треугольники (см. рис. 3).

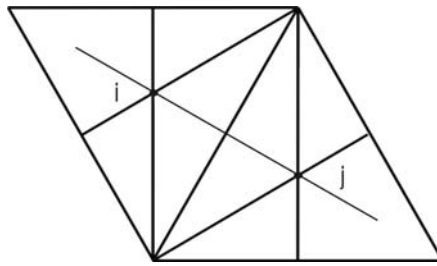


Рис. 3. Размещение термального узла для оцифровки на треугольных элементах [1]

Проводимость вычисляется между смежными узлами, имеющими общую границу (рис. 4). Проводимость между центром и рассматриваемой границей вычисляется для каждого узла:

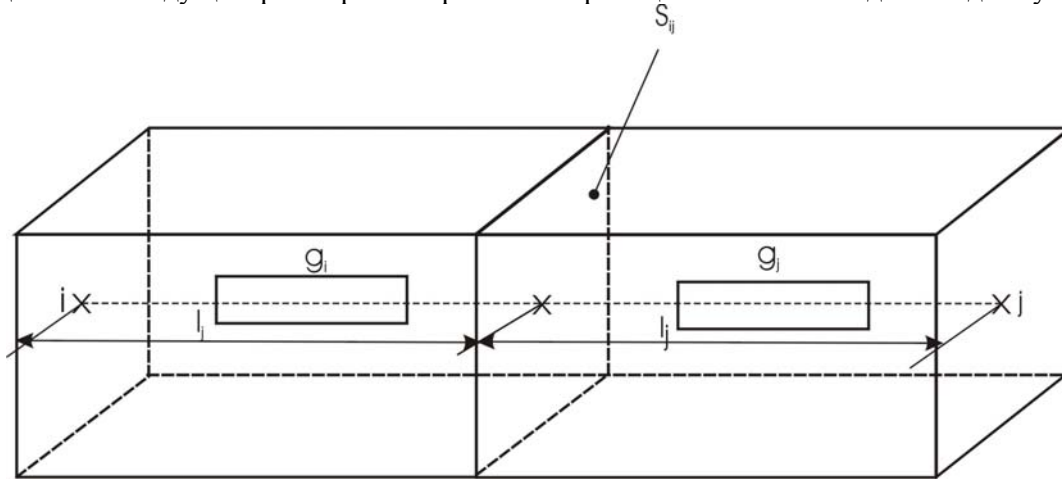


Рис. 4. Вычисление теплопередачи, происходящей за счет теплопроводности [3]

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{l_i}{\lambda_i S_{ij}} + \frac{l_j}{\lambda_j S_{ij}} = \frac{1}{g_i} + \frac{1}{g_j}, \tag{6}$$

где  $G_{ij}$  – проводимость между центрами элементов  $i$  и  $j$  [W/K];  $g_i, g_j$  – термальная проводимость между центрами узлов и границей разделения между двумя смежными элементами [W/K];  $l_i, l_j$  – расстояние между узлами элементов  $i, j$  и общей границей [m];  $\lambda_i, \lambda_j$  – термальные проводимости узлов элементов  $i$  и  $j$  [W/K];  $S_{ij}$  – поверхность раздела между двумя прилегающими элементами [m<sup>2</sup>].

Преобладающим видом теплообмена в электрических резистивных печах косвенного нагрева с высокими рабочими температурами и плотностями энергий является излучение. Резистивные системы, нагреваемые до температур 950 – 1200 °С, с успехом могут рассматриваться как инфракрасные излучатели.

С другой стороны, в статье идет речь о термообработке определенных деталей небольшого размера, термически тонких, чей теплообмен между собой и с внутренними поверхностями печи происходит преимущественно путем излучения.

Исходя из этих соображений, проблемы обработки деталей связываем со спецификой теплопередачи путём излучения.

Термальные узлы рассматриваются как поверхностные; поэтому в процессах термообработки в условиях радиационной теплопередачи в печах формулируются следующие предположения [1]:

1. Камера печи – замкнута и состоит из изотермических элементарных поверхностей, которые должны быть непрозрачными с ограниченным излучением в зону снаружи вблизи стенки: толщина стенок соответственно уменьшена, чтобы согласовать их с геометрическими

поверхностями, которые можно описать математически в условиях решаемой задачи.

2. Все поверхности – серые, и их излучение не зависит от длины волны.

3. Эти поверхности в некоторой степени излучают, и вместе с тем являются и диффузными отражателями согласно закону Ламберта.

4. Среда в камере совершенно прозрачна и не участвует в радиационном теплообмене.

Радиационный теплообмен рассматривается в следующих трех основных аспектах: теплообмен происходит исключительно между двумя поверхностями, теплообмен между более чем двумя поверхностями и определение форм-факторов (формы-факторы – это коэффициенты, учитывающие количество и конфигурацию поверхностей, принимающих участие в теплообмене).

Радиационный теплообмен между двумя поверхностями.

В термодинамической теории плотность энергии представляет собой энергию, излучаемую из единичной поверхности за единицу времени. Стефан и Больцман установили закон теплообмена между двумя абсолютно черными телами:

$$\Phi_{ij} = \sigma C_0 S_i (T_i^4 - T_j^4) [W], \quad (7)$$

где  $C_0 = 5,67 \times 10^{-8} [W/m^2k^4]$  представляет константу Стефана – Больцмана;  $T_i, T_j$  – температуры тел, являющиеся причиной теплового обмена между ними [K].

Нагрев тела зависит от его формы, от его способности излучать или поглощать тепловое излучение. Таким образом, уравнение теплопередачи путем диффузного излучения между двумя реальными серыми поверхностями имеет вид:

$$\Phi_{ij} = C_0 F(\varepsilon) S_i F_{i \rightarrow j} (T_i^4 - T_j^4) [W], \quad (8)$$

где  $\Phi_{ij}$  – сеточный (поскольку при разделении поверхности на элементы общий тепловой поток рассматривается как сеть потоков между узлами) тепловой поток между двумя поверхностями  $S_i, S_1$  и  $S_j, S_2$  в рассматриваемый интервал времени;  $T_i$  – температура излучающего тела [K];  $T_j$  – температура поглощающего тела [K];  $F(\varepsilon)$  – функция, зависящая от факторов излучения  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$  двух материальных поверхностей, обменивающихся энергией путем теплового излучения. Эта функция принимает во внимание тот факт, что реальные поверхности не являются абсолютно черными телами (это – серые тела), и соответственно не вся поступающая энергия поглощается, но часть ее отражается на другие поверхности или уходит за пределы системы. К тому же, явление отражения между поверхностями может быть многократным или повторяющимся в обоих направлениях.  $F(\varepsilon)$  представляет собой характеристику поверхности и может быть выражена как термальное сопротивление поверхности.

Вид тела  $i$  со стороны тела  $j$ , учитывающий тот факт, что только часть излучения, испускаемого телом  $i$ , может попасть на тело  $j$ . Этот фактор связан с ориентацией поверхности и может быть выражен как пространственное термальное сопротивление.

$F(\varepsilon)$  и  $F_{i \rightarrow j}$  могут быть связаны во взаимозависимую форму с помощью серого форм-фактора  $F_{fg}$ , обозначающего часть теплового потока, который оставляет поверхность элемента  $i$  и поглощается элементом  $j$  после многих диффузных отражений от других узлов области переноса.

$$F_{fg} = \overline{F(\varepsilon) F_{i \rightarrow j}} = f(F_{i \rightarrow j}, \overline{f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}, \overline{S_i, S_j}). \quad (9)$$

В практических расчетах используется уточненная концепция излучения системы тел, в которой принимается во внимание неполное поглощение энергии серых тел и отраженные потоки [4]

$$\Phi_{ij} = C_0 F(\varepsilon_c) \rho F_{i \rightarrow j} (T_i^4 - T_j^4), \quad (10)$$

где  $\rho$  – индекс отражения;

Учитывая тот факт, что на поверхности тела, подвергаемого потоку излучения, кроме отражения, присутствуют также явления поглощения и пропускания, можно описать

следующее соотношение между коэффициентами частей, разделяющими поток, попадающий на поверхность тела:

$$\rho + a + \tau = 1, \tag{11}$$

где  $a$  – коэффициент поглощения;  $\tau$  – коэффициент пропускания.

Для непрозрачных тел можно написать:

$$\rho + a\tau = 1. \tag{12}$$

Согласно закону Кирхгофа

$$\rho = 1 - a = 1 - \varepsilon. \tag{13}$$

На рис. 5 представлена схема потоков, задействованных в радиационном теплообмене на поверхности тела.

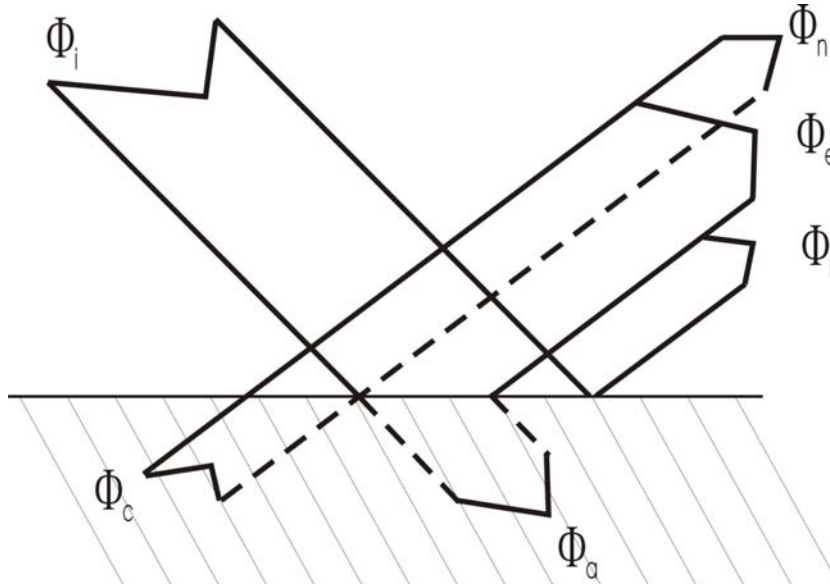


Рис. 5. Потоки, участвующие в поверхностном радиационном теплообмене [2]

$\Phi_i$  – поток, излучаемый всеми поверхностями камеры и попадающий на рассматриваемую поверхность либо сразу, либо после одно- или многократных отражений;  $\Phi_a$  – поток, поглощаемый поверхностью; ( $\Phi_a = \varepsilon\Phi_i$ );  $\Phi_r$  – поток, отражаемый поверхностью; ( $\Phi_r = (1-\varepsilon)\Phi_i$ );  $\Phi_e$  – поток, излучаемый на поверхности и связанный с температурой тела; ( $\Phi_e = \varepsilon C_0 ST^4$ );  $\Phi_n$  – излучаемый сеточный поток, эффективные потери из-за излучения на поверхности; ( $\Phi_n = \Phi_e - \Phi_a$ );  $\Phi_c$  – поток, который проводится.

Для непрозрачных серых тел коэффициент поглощения зависит от спектрального состава падающего потока.

Одновременный радиационный теплообмен между более чем двумя поверхностями.

В случае печи, изготовленной из закрытых камер разных геометрических форм, в рабочих пространствах которой размещаются детали разных форм и конфигураций, будет больше двух поверхностей, обменивающихся энергией через излучение, в этом случае термальный обмен реализуется как прямым путем (непосредственным излучением), так и косвенным (при отражениях от этих поверхностей). Анализ теплопереноса в этой ситуации производится с рассмотрением энергетического излучения, связанного с каждой поверхностью. Анализ производится в предположении, что все поверхности рассматриваются серыми – диффузными, однородными по температуре, а также, что излучающие и отражающие свойства постоянны по всей поверхности.

Таким образом, определим два обозначения:

I – облучение, соответствующее общему входящему излучению за единицу времени, такому,

что попадает на единицу площади  $[W/m^2]$ ;

$B$  – энергетическое излучение, соответствующее общему исходящему из той же поверхности излучению за единицу времени на единицу площади  $[W/m^2]$ .

Для упрощения расчетов предполагаем, что энергетическое излучение и облучение однородны по всей поверхности, что может привести к ошибке, поскольку серые – диффузные поверхности не соответствуют строго этому условию.

Таким образом, для поверхности из определенного материала  $i$  можно записать энергетический баланс:

Энергетическое излучение = излучаемая энергия + сумма отраженных излучений

Это дает:

$$B_i = \varepsilon_i E_{ni} + \rho_i I_i = \varepsilon_i E_{ni} + (1 - \varepsilon_i) I_i \quad [W/m^2]. \quad (14)$$

Поток энергии излучения, оставляющий поверхность  $S_i$ , будет:

$$\Phi_i = (B_i - I_i) S_i = \varepsilon_i S_i (E_{ni} - B_i) / (1 - \varepsilon_i) \quad [W]. \quad (15)$$

выражает скорость теплопередачи с поверхности  $S_j$ .

Рассмотрим энергетический обмен между двумя поверхностями  $S_i$  и  $S_j$ , здесь:

$B_i S_i F_{i \rightarrow j}$  количество от общей энергии излучения, которое покидает поверхность  $S_i$  и достигает поверхности  $S_j$ ;  $B_j S_j F_{j \rightarrow i}$  количество из общей энергии излучения, которое покидает поверхность  $S_j$  и достигает поверхности  $S_i$ .

Энергетический сеточный обмен между двумя поверхностями будет [4]:

$$\Phi_{ij} = B_i S_i F_{i \rightarrow j} - B_j S_j F_{j \rightarrow i} = S_i F_{i \rightarrow j} (B_i - B_j) \quad [W]. \quad (16)$$

Принимая во внимание, что поверхность  $i$  излучает по направлению к поверхности  $j$ , общее излучение является суммой всех излучений от других  $j$  поверхностей:

$$\Phi_i = \varepsilon_i S_i (E_{ni} - \sum_j I_j). \quad (17)$$

Поскольку облучение может быть выражено как  $S_j B_j F_{i \rightarrow j} = I_j S_i$  и учитывая свойство взаимодействия  $S_j F_{j \rightarrow i} = S_i F_{i \rightarrow j}$ , получаем:

$$\Phi_i = \varepsilon_i S_i (E_{ni} - \sum_j F_{i \rightarrow j} B_j) = S_i B_i - \sum_j F_{i \rightarrow j} B_j, \quad (18)$$

где

$$B_i = (1 - \varepsilon_i) \sum_j F_{i \rightarrow j} B_j + \varepsilon_i E_{ni}. \quad (19)$$

В этом случае принимается во внимание тот факт, что:

$$\Phi_{ij} = S_i F_{i \rightarrow j} B_i - S_j F_{j \rightarrow i} B_j = S_i F_{i \rightarrow j} (B_i - B_j) \quad [W]. \quad (20)$$

Это возможно определить:

$G_{ij}(fg) = S_i F_{i \rightarrow j}$  как проводимость геометрической формы в излучающем теплообмене [4].

С другой стороны, излучаемый сеточный поток с излучающей поверхности  $i$  задается соотношением (15) и может быть определен как проводимость поверхности в излучающем теплообмене [4]:

$$G_{is}(fs) = \varepsilon_i S_i / (1 - \varepsilon_i). \quad (21)$$



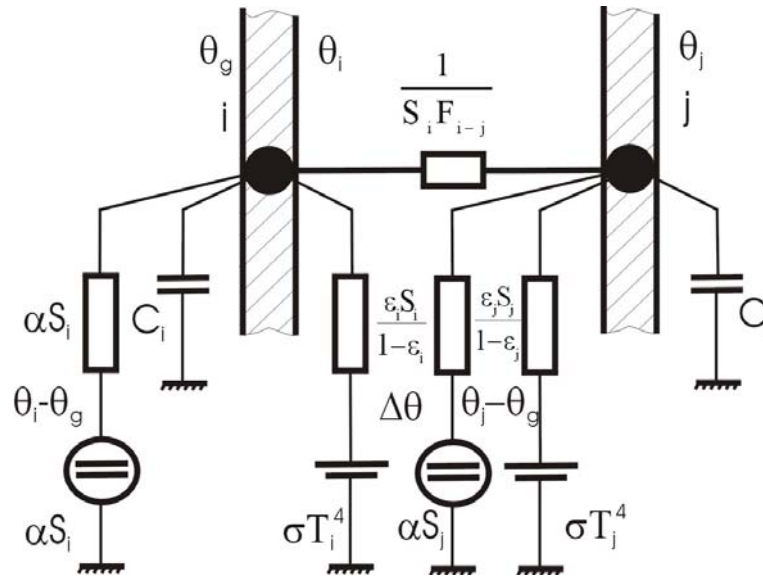


Рис. 6. Представление излучающего теплообмена в виде эквивалентных электрических схем [4]

В этом случае данное уравнение для излучательного теплообмена между большим количеством поверхностей будет:

$$\begin{aligned}
 B_i &= (1 - q_i) \sum_j F_{i \rightarrow j} B_j + \varepsilon_i E_{ni} = \frac{1 - \varepsilon_i}{S_i} \sum_j S_j F_{i \rightarrow j} B_j + \varepsilon_i S_i E_{ni} = \\
 &= \frac{1 - \varepsilon_i}{S_i} \sum_j G_{ij} B_j + (1 - \varepsilon_i) G_{is} E_{ni}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Определение форм-факторов.

Сеточный поток, излучаемый из поверхности  $i$  по направлению к поверхности  $j$ , будет:

$$d\Phi_i = \frac{C_0 T_i^4}{\pi r^2} \cos \psi_i \cos \psi_j ds_i ds_j. \tag{23}$$

от поверхности  $j$  к поверхности  $i$  имеем:

$$d\Phi_j = \frac{C_0 T_j^4}{\pi r^2} \cos \psi_i \cos \psi_j ds_i ds_j. \tag{24}$$

Сеточный поток между двумя поверхностями  $i$  и  $j$ :

$$d\Phi_{ij} = d\Phi_i - d\Phi_j = \frac{C_0 (T_i^4 - T_j^4)}{\pi} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j ds_i ds_j}{r^2} \tag{25}$$

Интегрируя

$$\int d\Phi_{ij} = \frac{C_0 (T_i^4 - T_j^4)}{\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j ds_i ds_j}{r^2}, \tag{26}$$

получим:

$$S_i F_{i \rightarrow j} C_0 (T_i^4 - T_j^4) = - \frac{C_0 (T_i^4 - T_j^4)}{\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j ds_i ds_j}{r^2}. \tag{27}$$

Это определяется как термальная функция теплообмена многих поверхностей:

$$S_i F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j ds_i ds_j}{r^2}. \quad (28)$$

Анализируя обратное излучение от поверхности  $S_j$  к поверхности  $S_i$  определяем подобие:

$$S_j F_{j \rightarrow i} = \frac{1}{\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j ds_i ds_j}{r^2}. \quad (29)$$

Тут учитываются взаимные свойства:

$$S_i F_{i \rightarrow j} = S_j F_{j \rightarrow i}. \quad (30)$$

Это означает, что функция радиационной теплопередачи остается неизменной независимо от формы и размещения тел.

В систему, окруженную телами и находящуюся в среде излучения, термальный поток, излучаемый одним из тел на все остальные, равен излучению описанных тел:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ji} = \sum_{j=1}^n \Phi_i F_{i \rightarrow j}. \quad (31)$$

Получаем следующее контрольное соотношение:

$$\sum_{j=1}^n F_{i \rightarrow j} = 1, \text{ unde } : F_{i \rightarrow j} \in [0,1]. \quad (32)$$

Для некоторых поверхностей, размещенных в простых геометрических конфигурациях, специальная литература дает упрощенные формулы расчета форм-факторов [5].

Для более сложных конфигураций или более точного расчета необходимо вычисление двойного поверхностного интеграла (рис. 7):

$$F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{\pi} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{\cos \Psi_i \cos \Psi_j}{r^2} ds_i ds_j. \quad (33)$$

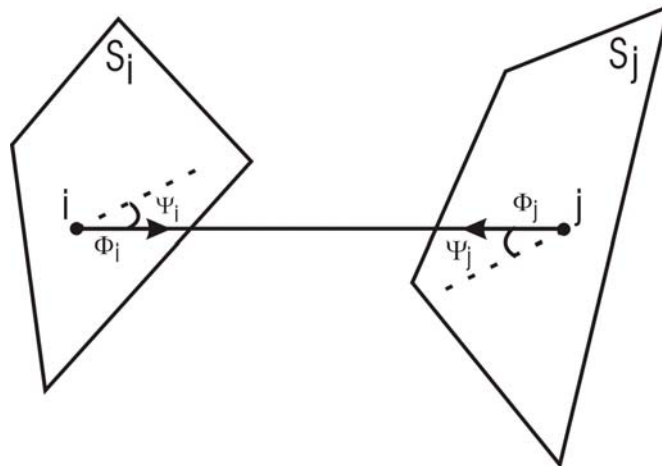


Рис. 7. Определение факторов вида посредством двойного поверхностного интеграла [2]

Стрелка показывает, что форм-факторы могут быть определены с помощью двойного поворота начиная с преобразования формулы Грина – Гаусса поверхностного двойного интеграла в простое вращение (рис. 8).

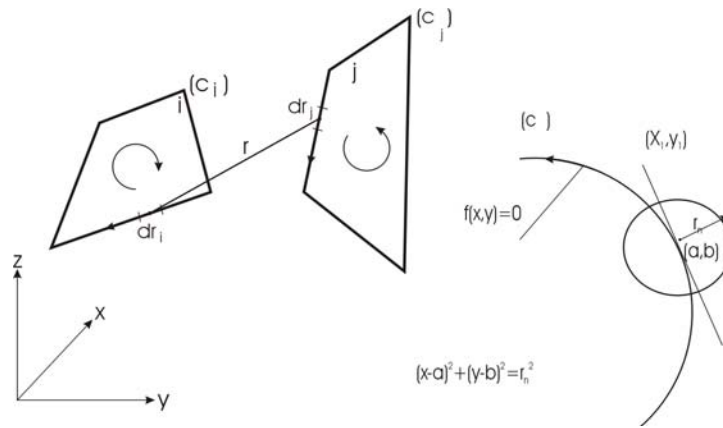


Рис. 8. Определение факторов вида через двойную циркуляцию (вращение) [2]

$$F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{2\pi S_i} \int_{C_i} \int_{C_j} \ln(r) dr_i dr_j, \quad (34)$$

где  $C_i, C_j$  – представляют контуры, ограничивающие поверхности  $S_i$  и  $S_j$ ;  $dr_i, dr_j$  – представляют элементарные длины контура  $C_i$  относительно  $C_j$ ;  $r$  – расстояние между элементарными длинами  $dr_i$  и  $dr_j$ .

Примененный метод определения факторов вида представляет собой метод Ромберга, который заключается в аппроксимации интегрального значения при условии устремления к нулю рассматриваемых временных интервалов. В примененных вычислениях процедура по сути заключается в реализации двух четко различимых шагов:

При выполнении первого шага производится аппроксимация двойного вращения путем повторяющегося применения правила трапеции, причем шаг составляет  $h, h/2, h/4 \dots$  для каждого сегмента контура. Этот метод позволяет заменить двойной интеграл двойной суммой:

$$I^k = h_1 h_2 \left[ \frac{f(A, C) + f(A, D) + f(B, C) + f(B, D)}{4} + \sum_{j=1}^{2^N-1} \frac{f(A, C + jh_2) + f(B, C + jh_2)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^N-1} \frac{f(A + ih_1, C) + f(A + ih_1, B)}{2} + \sum_{i=1}^{2^N-1} \sum_{j=1}^{2^N-1} (f(A + ih_1, C + jh_2)) \right], \quad (35)$$

$\Delta i = 2 \quad \Delta j = 2$

где  $A, B$  – границы интегрирования по направлению  $r_1$  (на контуре  $C_1$ );  $C, D$  – границы интегрирования по направлению  $r_2$  (на контуре  $C_2$ );  $h_{iN} = (B - A)/2^N$  – шаг интегрирования по контуру  $C_1$ ;  $h_{jN} = (D - C)/2^N$  – шаг интегрирования по контуру  $C_2$ ;  $k = i \times j$  – аппликационный, то есть используемый, номер двойного интеграла;  $2^N = n - 2^N = n$  – количество шагов или повторяющегося применения правила трапеции;  $dr_1, dr_2$  – единичные векторы по направлению  $r_1$  на контуре  $C_1$  и соответственно  $r_2$  на контуре  $C_2$ ;  $x_1, y_1, z_1$  – координаты единичного вектора  $dr_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$  – координаты единичного вектора  $dr_2$ ;

В следующем шаге используется приближение Ромберга: вычисления производятся по рекурсивной формуле, где используются значения  $I(n, 1)$ , определенные на предыдущем шаге:

$$I(m, n) = I(m - 1, n + 1) + \frac{\{I(m - 1, n + 1) - I(m - 1, n)\}}{4^m - 1}, \quad (36)$$

где  $n$  – число строк диагональной матрицы;  $m$  – число колонок диагональной матрицы.

Для кривых поверхностей проблема заключается в определении оптимального значения отрезков линий вдоль контура. Таким образом, для криволинейных контуров, аппроксимируемых окружностью с центром в точке  $A(a, b)$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_n^2. \quad (37)$$

Это задается тангенсом, касательным к контуру в точке с координатами (a, b), где пересекается окружность с центром в точке (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), и

$$\begin{cases} \delta_l = x_l - a \\ \varphi_l = y_l - b \end{cases} \quad (38)$$

Исходя из того, что касательная пересекает окружность в двух противоположных точках ( $\delta_l, \varphi_l$ ), выбранных так, что они имеют то же обозначение:

$$\nabla f x \{ \delta_l \vec{i} + \varphi_l \vec{j} \}. \quad (39)$$

Это дает ( $\delta_l, \varphi_l$ ) начальные решения для точки пересечения окружности с контуром и ( $\delta_2, \varphi_2$ ) наилучшую аппроксимацию:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_l + g \\ \delta_2 = \delta_l + k, \end{cases} \quad (40)$$

где  $g \ll \delta_l$ , соответственно  $k \ll \varphi_2$ .

Это дает:

$$(\delta_l + g)^2 + (\varphi_l + k)^2 = r_n^2 \quad (41)$$

Раскладывая это выражение в ряд Тейлора, получаем:

$$f(a + \delta_2, b + \varphi_2) = f_0(a, b) + \delta_2 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)+\dots} \quad (42)$$

Предполагая, что  $f(a, b) = 0$ , имеем:

$$\left( g \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(a,b)} = - \left( \delta_l \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_l \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(a,b)}. \quad (43)$$

Решая систему уравнений, где найдены неизвестные  $g$  и  $k$ , получаем ( $\delta_2, \varphi_2$ ).. Заменяя ( $\delta_l, \varphi_l$ ) на ( $\delta_2, \varphi_2$ ), продолжаем процесс до сходимости, используя ( $\delta_n, \varphi_n$ ), посредством ( $m-1$ ) итераций, и точки контура будут ( $a + \delta_n$ ) и ( $b + \varphi_n$ )..

Для плоских пересекающихся контуров, для того, чтобы избежать возможных математических несовместимостей, когда  $\ln(0)$  (когда расстояние между двумя соседними элементарными отрезками на контуре равно нулю), для этих частей контура применяется формула [2]:

$$\varepsilon = - \frac{1}{2\pi S_1} \int_{r_1=0}^L \int_{r_2=0}^L |r_2 - r_1| dr_1 dr_2 = - \frac{1}{2\pi S_1} L^2 [\ln(L) - 1,5], \quad (44)$$

которая добавляется к сумме факторов вида, вычисленных для других функций.

Матрица факторов вида дополняется значениями факторов вида, которые не вычисляются через интегралы, а оцениваются по формулам соответствия:

$$F_{i \rightarrow j} S_i = F_{j \rightarrow i} S_j. \quad (45)$$

Для стенок, имеющих сопротивления, применимо приближение, при котором часть потока, излучаемого резисторами и достигающего детали, после отражений от стенки образует форм-фактор как результат умножения двух факторов:

$$F_{R-S} = F_{R-P} F_{R-S}, \quad (46)$$

$F_{R-P}$  – фактор вида между резистором и стенкой;  $F_{R-S}$  – фактор вида между поверхностью стенки

и детали, вычисленный методом интегрирования. В результате это дает фактор вида между двумя резистивными прилегающими элементами:

$$F_{R-R} = 1 - F_{R-P} F_{P-S}. \quad (47)$$

### Выводы

Эффект конвекции, принимаемый во внимание, когда резисторы находятся при относительно низких температурах, представляет собой ситуацию, которая длится непродолжительное время. Вообще конструкторы электрических печей для термообработки оборудуют печи электрически управляемыми элементами для регулирования распределения атмосферы в камере печи. Эти механически управляемые приборы, регулирующие распределение газов в камере, обеспечивают некоторый конвекционный теплообмен, направляя потоки тепла именно на поверхности деталей, но точное определение коэффициентов конвекционного теплообмена остается довольно сложной задачей.

Трудности с определением коэффициентов конвекционного теплообмена связаны в основном с отсутствием учета скорости потоков; они пересекают различные зоны печи с разными термогидравлическим сопротивлением, зависящими от распределения и конфигурации деталей. При температурах свыше 800 °С конвекционным теплообменом можно пренебречь, и это не приведет к грубой ошибке в расчетах, поскольку при этих и более высоких температурах доля излучения в теплообмен превышает 90 %. С другой стороны, конвективный теплообмен при высоких температурах уменьшается пропорционально снижению вязкости газов в камере печи.

Преобладающим видом теплообмена в электрических печах с резисторами прямого нагрева при рабочих температурах и высоких плотностях энергии является излучение. Резистивные системы, работающие при температурах 950 – 1200 °С, с приближением могут рассматриваться как инфракрасные излучатели.

С другой стороны, в статье рассматривается тепловая обработка деталей термически тонких, происходящая преимущественно путем теплообмена излучением от оснастки камеры и других деталей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rao, S. S., The finite element method in engineering. / S. S. Rao, Elsevier Science & Technology, 1992, 688 p.
2. Falotă, H., Iosof, T., Conducerea proceselor de tratament termic în structură descentralizată prin reglare autoadaptiv – optimală a parametrilor de proces, Simpozion Internațional de electrotermie, Slatina 1995.
3. Ciochină, S., Negrescu, C., Sisteme adaptive, Colecția Comunicații, 1999, 352 p.
4. Janna, W., Engineering Heat Transfer, CRC, 2000, 696 p.
5. Popa, B., Vintilă, C., Termotehnică și Mașini termice, București, EDP, 1977.
6. Vizureanu, P., Contribuții privind îmbunătățirea constructiv-funcțională a cuptoarelor de tratamente termice cu încălzire electrică și a echipamentelor specifice acestora, Teză de Doctorat, U.T. “Gh.Asachi” Iași, 1999.
7. Vizureanu, P., Modern System for Heat Treatment Assisted by Computer, Modelling and Optimisation in the Machines Buil Field, Romanian Academy, (1998), p. 137 – 141.
8. Huțanu, C., Postolache, M., Sisteme cu microprocesoare în conducerea automată a proceselor, Editura Academica, Galați, 2001, 332 p.

**Петрика Визуреану** – д. э. н., заместитель декана факультета материаловедения.  
Технический университет “Gheorghe Asachi”, г. Яссы, Румыния.