УДК 681.325.5

А. Д. Азаров, д. т. н.; проф.; А. И. Черняк

РАЗРЯДНОСТЬ УСТРОЙСТВ ПОРАЗРЯДНОГО СЛОЖЕНИЯ В *АМ*-СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В данной статье рассмотрен класс систем счисления с аддитивными и мультипликативными соотношениями между весами разрядов. Описано поразрядное сложение в таких системах счисления и определены границы, в которых находится разрядность поразрядных сумматоров.

Ключевые слова: *поразрядное сложение, системы счисления, аддитивные преобразования.*

Актуальность

Повышение производительности технических средств возможно за счет распределенной обработки множественных потоков данных. Эффективная организация распределенной обработки требует решения проблемы информационных связей между устройствами. Данная проблема состоит в том, что с увеличением количества распределенных устройств значительно быстрее возрастает общее количество информационных связей между ними.

Одним из путей решения данной проблемы является конвейерная поразрядная обработка последовательных кодов [1 – 5]. Выполнение всех поразрядных конвейерных операций в едином потоке осуществляется по известным алгоритмам, начиная со старших разрядов. Для этого используются избыточные системы счисления, поскольку в них существует ограничение длины переноса в старшие разряды при поразрядном сложении и вычитании.

При поразрядном конвейерном сложении, начиная со старших разрядов, перенос имеет определенную длину, которая определяет разрядность поразрядных сумматоров. В свою очередь разрядность поразрядных сумматоров существенно влияет на аппаратные затраты при построении средств конвейерной поразрядной обработки кодов. Избыточных систем счисления с двоичными цифрами может существовать большое количество, но не в каждой такой системе возможно ограничение длины переноса при выполнении арифметических операций. Авторами определен класс избыточных позиционных систем счисления, названных *АМ*-системами счисления, в которых можно поразрядно выполнять все арифметические операции, начиная со старших разрядов [6]. При поразрядном сложении в *АМ*-системах счисления перенос выполняется на основе аддитивных преобразований. Длина переноса определяет разрядность поразрядного сумматора. Однако отсутствуют известные теоретические разработки, с помощью которых можно было бы определять длину переноса в зависимости от параметров системы счисления и таким образом сравнивать разрядности поразрядных сумматоров для любых *АМ*-систем счисления.

Цель

Целью статьи является повышение эффективности проектирования устройств поразрядной обработки в любой *АМ*-системе за счет определения зависимости разрядности поразрядных сумматоров от параметров заданной системы счисления.

Задачи

Для достижения данной цели нужно решить такие задачи:

1. Исследование *АМ*-систем счисления, которые обобщают известные и позволяют создавать новые системы счисления с возможностью конвейерного поразрядного выполнения всех арифметических операций над кодами чисел, начиная со старших разрядов;
2. Исследование аддитивных преобразований – условных числовых операций в *АМ*-системах счисления и определение их связи с известными операциями переноса и заема.

3. Исследование поразрядного сложения и определение зависимости длины переноса от параметров аддитивного соотношения.

AM-системы счисления

Введем понятие класса систем счисления с аддитивными и мультипликативными соотношениями между весами разрядов (*AM*-систем счисления). *AM*-системы счисления – это позиционные избыточные системы счисления, в которых вес каждого разряда является степенью основания системы счисления, а между весами разрядов существует аддитивное соотношение определенного вида с заданными ограничениями. Произвольная *AM*-система счисления может быть описана следующей совокупностью параметров

$$\left\{ \begin{array}{l} C_k = \{0,...,c_{k-1}\}; \\ w; \\ {}^{t}A^{\tau,p} : w^{\tau p+t} = R^{\tau,p} \end{array} \right\}, \tag{1}$$

где $k \geq 2$ – значность системы счисления; C_k – множество цифр; w – основание системы счисления; ${}^{t}A^{\tau,p}$ – аддитивное соотношение (А-соотношение) порядка (t, τ, p); t, τ, p – параметры аддитивного соотношения ($t>0, \tau>0$, $p \geq 0$ – целые); $R^{\tau,p} = \sum_{i=0}^{p} r_i \cdot w^{\tau i}$ – предельное значение $\left(r \in C_k\right)$.

При этом на параметры аддитивного соотношения накладываются такие ограничения:

$$\begin{cases} r_{\tau i} \geq r_{\tau(i-1)} > 0; \\ \tau_{\bmod t} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Аддитивное соотношение задается параметрами t и τ, а также набором цифр $r_{\tau p},...,r_0$, которые не зависят от номера разряда. Полином $R^{\tau,p}$ может быть представлен в виде кода

$$r_{\tau p}\underbrace{0\cdots 0 r_{\tau(p-1)}}_{\tau}\cdots\underbrace{0\cdots 0 r_{\tau}}_{\tau}\underbrace{0\cdots 0 r_0}_{\tau}.$$

При этом считается, что

$$R_{i-\tau p}^{\tau,p} = w^{i-\tau p} \cdot R^{\tau,p}.$$

Между аддитивным соотношением, основанием системы счисления и множеством цифр существует связь: основание системы счисления является положительным действительным корнем аддитивного соотношения, в котором коэффициенты при неизвестном являются цифрами. Исходя из этого, *AM*-система счисления может быть однозначно задана любой из пар параметров $\{ C_k, {}^{t}A^{\tau,p} \}$ или $\{ C_k, w \}$ согласно (1). Учитывая необходимость соблюдения ограничений, которые накладываются на аддитивные соотношения в (2), наиболее просто задавать *AM*-систему счисления с помощью параметров C_k *и* ${}^{t}A^{\tau,p}$.

Аддитивные преобразования

Наличие аддитивных соотношений между разрядами в *AM*-системах счисления позволяет выполнять операции аддитивного преобразования кодов чисел (*A*-преобразования), которые состоят в изменении кода числа при сохранении его числового эквивалента. *A*-преобразования являются особым типом условных числовых операций, которые выполняются над частью кода числа или над всем кодом. При выполнении *A*-преобразования над кодом числа старшие и младшие относительно данного преобразования разряды изменяют свое значение, однако значение всего кода не изменяется. Изменение частей кодов осуществляется за счет операций сложения и вычитания. Операции увеличения одной части кода числа и уменьшения другой при неизменном значении всего кода известны под названием переноса и заема. Итак, аддитивные преобразования осуществляют перенос и заем при сложении и вычитании кодов в *AM*-системах счисления. Заем в дальнейшем будет также называться переносом в младшие разряды.

Аддитивные преобразования можно классифицировать по направлению переноса и по условию выполнения. На рис. 1 приведена классификация аддитивных преобразований в *AM*-системах счисления.

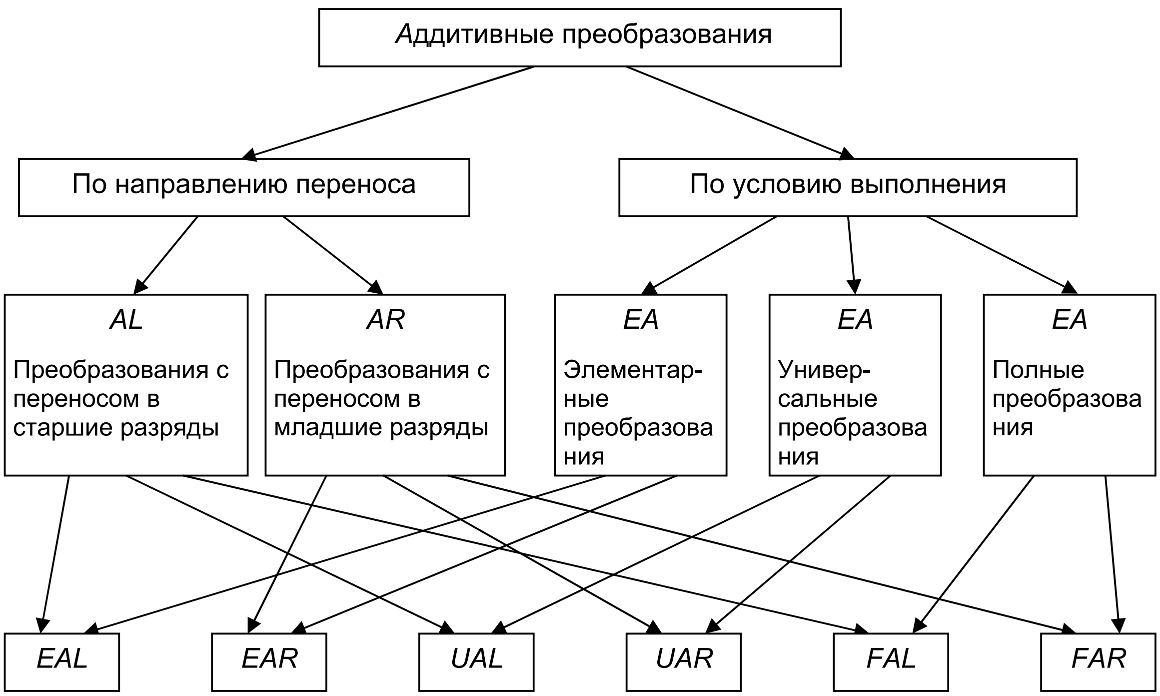

Рис. 1. Классификация аддитивных преобразований

Рассмотрим каждый из видов аддитивных преобразований отдельно. По направлению переноса *A*-преобразования делятся на преобразования с переносом в старшие разряды (*AL*-преобразования) и преобразования с переносом в младшие разряды (*AR*-преобразования). При *AL*-преобразовании происходит прибавление к старшим разрядам и вычитание от младших, а при *AR*-преобразовании – наоборот:

$$ {}^{t}AL_i^{\tau,p}(X_0^{n-1}) : X_0^i - R_{i-\tau p}^{\tau,p} + X_{i+1}^{n-i-2} + w^{i+t} ; $$

$$ {}^{t}AR_i^{\tau,p}(X_0^{n-1}) : X_{i+1}^{n-i-2} - w^{i+t} + X_0^i + R_{i-\tau p}^{\tau,p} . $$

Аддитивные преобразования выполняются при необходимых и достаточных условиях. Необходимое условие *i*-го *AL*-преобразования заключается в том, что значение разрядов от 0-го до *i*-го должно быть не меньшим, чем соответствующее предельное значение, а значение (*i*+*t*)-го разряда должно быть меньшим, чем старшая цифра. Необходимое условие *i*-го *AR*-преобразования состоит в том, что значение разрядов от 0-го до *i*-го должно быть не большими чем разность между максимальным кодом в этих разрядах и соответствующим предельным значением, а значение (*i*+*t*)-го разряда должно быть большим нуля.

По достаточным условиям выполнения *A*-преобразования делятся на элементарные (*E*), универсальные (*U*) и полные (*F*). В элементарных *A*-преобразованиях (*EA*-преобразованиях) проверяются достаточные условия в каждом отдельном разряде изменяемой части кода:

$$ {}^{t}EAL_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1})=\begin{cases} X_{0}^{n-1}\ \text{при}\,(x_{i+t}=c_{k-1})\vee \underset{0\le j\le p}{\exists}(x_{i-\tau(p-j)}<r_{\tau j}); \\ (X_{i+1}^{n-i-2}+w^{i+t})+(X_{0}^{i}-R_{i-\tau p}^{\tau,p})\,\text{при} \\ (x_{i+t}<c_{k-1})\wedge \underset{0\le j\le p}{\forall}(x_{i-\tau(p-j)}\ge r_{\tau j}); \end{cases} $$

$$ {}^{t}EAR_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1})=\begin{cases} X_{0}^{n-1}\ \text{при}\,(x_{i+t}=0)\vee \underset{0\le j\le p}{\exists}(x_{i-\tau(p-j)}+r_{\tau j}>c_{k-1}); \\ (X_{i+1}^{n-i-2}-w^{i+t})+(X_{0}^{i}+R_{i-\tau p}^{\tau,p})\,\text{при} \\ (x_{i+t}>0)\wedge \underset{0\le j\le p}{\forall}(x_{i-\tau(p-j)}+r_{\tau j}\le c_{k-1}). \end{cases} $$

Универсальные аддитивные преобразования (UA-преобразования) аналогичные элементарным в том смысле, что они тоже заключаются в эквивалентном изменении кода таким образом, что, хотя значение отдельно для старших и для младших разрядов изменяется, значение всего кода остается неизменным. В отличие от EA-, в UA-преобразованиях выполнения достаточных условий проверяется не для значений каждого отдельного разряда, а для общих значений частей кодов. Это дает возможность выполнять UA-преобразования для всех значений превращаемой части кода, которые удовлетворяют необходимым условиям преобразования:

$$ {}^{t}UAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b+t})=\begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b+t}\ \text{при}\ (x_{i+t}=c_{k-1})\vee X_{i-\tau b}^{\tau b}<R_{i-\tau p}^{\tau,p}; \\ X_{i-\tau b}^{\tau b+t}+w^{i+t}-R_{i-\tau p}^{\tau,p}\ \text{при} \\ (x_{i+t}<c_{k-1})\wedge X_{i-\tau b}^{\tau b}\ge R_{i-\tau p}^{\tau,p}; \end{cases} $$

$$ {}^{t}UAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b+t})=\begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b+t}\ \text{при} \\ (\mathrm{x}_{i+t}=0)\vee X_{i-\tau b}^{\tau b}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}>c_{k-1}\sum\limits_{j=i-\tau b}^{i}w^{j}); \\ X_{i-\tau b}^{\tau b+t}-w^{i+t}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}\ \text{при} \\ (\mathrm{x}_{i+t}>0)\wedge(X_{i-\tau b}^{\tau b}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}\le c_{k-1}\sum\limits_{j=i-\tau b}^{i}w^{j}). \end{cases} $$

При полном аддитивном преобразовании (FA-преобразовании) выполняются универсальные аддитивные преобразования не только в i-ом, но и во всех младших превращаемых разрядах. Достаточным условием FA-преобразования является выполнение достаточного условия UA-преобразования хотя бы в одном из превращаемых разрядов. Результатом выполнения ${}^{t}FA_{i}^{\tau,p}$-преобразования над разрядами кода от (i-τb)-го до (u+t)-го является код, у которого для каждого j от (i-τb)-го до i-го значение разрядов от (j-τb)-го до j-го не удовлетворяет условию ${}^{t}UA_{i}^{\tau,p}$-преобразования того же направления:

$$ {}^{t}FAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})={}^{t}UAL_{i-\tau b}^{\tau,p}({}^{t}UAL_{i-\tau+t}^{\tau,p}(\cdots{}^{t}UAL_{i-t}^{\tau,p}({}^{t}UAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))\cdots)). $$

$$ {}^{t}FAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})={}^{t}UAR_{i-\tau b}^{\tau,p}({}^{t}UAR_{i-\tau+t}^{\tau,p}(\cdots{}^{t}UAR_{i-t}^{\tau,p}({}^{t}UAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))\cdots)). $$

Аддитивные преобразования являются обобщением известных операций переноса и заема при выполнении поразрядного сложения и вычитания. Действительно, перенос и заем так же, как и аддитивные преобразования, изменяют значение отдельных разрядов, не изменяя значение всего кода. Изменение значений разрядов при перенесении и заимствовании основано на аддитивном соотношении между весами разрядов. Например, перенос при переполнении некоторого разряда заключается в прибавлении к старшему разряду единицы и вычитании от переполненного разряда эквивалентного значения, что по сути и представляет собой *AL*-преобразование. Но в отличие от переноса и заема *A*-преобразования в *AM*-системах счисления могут выполняться не только в случае, при котором значение разряда становится большим максимальной цифры или меньшим нуля, но и в случае, при котором определенная группа разрядов достигает предельного значения, выраженного заданным кодом. Поэтому в таких системах счисления аддитивные преобразования могут выполняться как во время операций сложения и вычитания, так и отдельно от них.

Поразрядное сложение

В *AM*-системах счисления сложение выполняется тем же самым способом, что и в известных позиционных системах счисления. Сначала прибавляются цифры в отдельных разрядах, а потом при необходимости выполняется перенос между разрядами. Рассмотрим более детально процесс поразрядного сложения последовательных кодов, начиная со старших разрядов. Пусть нужно найти код результата Z, что равен сумме кодов X и Y $X+Y=Z$. При поразрядном сложении в *AM*-системах счисления на входы поразрядного сумматора, начиная со старшего разряда, поступают последовательные коды слагаемых X и Y, а с выхода, начиная со старших разрядов, поступает последовательный код суммы Z, как изображено на рис. 2.

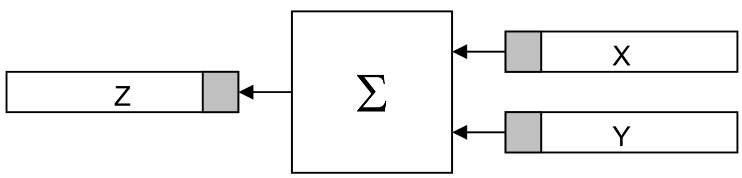

Рис. 2. Общая схема поразрядного сложения

Поразрядное сложение кодов в *AM*-системах счисления выполняется по известным методам неавтономной обработки [3] и представляет собой последовательность шагов сложения отдельных разрядов, начиная со старшего, на каждом из которых определяется код результата Z_i таким образом, который на последнем шаге равняется коду результата Z. На очередном i-ом шаге в сложении принимают участие (n-i-1)-ые разряды слагаемых. При выполнении сложения очередных разрядов слагаемых возникает перенос в другие разряды результата. Поскольку в общем случае основание *AM*-системы счисления не является целым, то перенос может быть как в старшие, так и в младшие разряды. Поэтому код результата Z_i в общем случае может иметь ненулевое значение в разрядах младших и старших от (n-i-1)-го. Определение результата Z_i на каждом шаге происходит путем прибавления очередных разрядов к результату, полученному на предыдущем шаге:

$$Z_i = Z_{i-1} + x_i + y_i .$$

Нужно отметить, что поскольку *AL*- и *AR*-преобразования выполняются над разрядами, расположенными один от другого на расстоянии, кратном t, то перенос в любой i-ый разряд может быть только из разрядов с номерами ($i \pm nt$).

То есть для определения переноса в i-ый разряд нужно анализировать разряды, которые имеют номера ($i \pm nt$), где n=1, 2, 3,... Это позволяет рассматривать сложение в любой *AM*-системе счисления с параметром аддитивного соотношения t>1 как несколько независимых сложений, каждое из которых выполняется в той же *AM*-системе счисления, но при t=1. Поэтому для упрощения анализа дальше будет рассмотрено только случай t=1.

Особенностью сложения в *AM*-системах счисления является возможность ограничения распространения переноса в старшие разряды за счет выполнения *FAL*-преобразования над группой разрядов на предыдущем такте сложения:

$$Z_i = {}^1FAL_{n-1-i}^{\tau,p}(Z_{i-1} + (x_{n-1-i} + y_{n-1-i}) \cdot w^{n-1-i}).$$

Ограничение длины переноса при выполнении сложения в *AM*-системах счисления, обусловлено двумя свойствами *AM*-систем счисления. Первое свойство присуще вообще всем позиционным системам счисления с возрастающим рядом весов разрядов. Оно является очевидным и состоит в том, что результат сложения любой группы разрядов не больше единицы некоторого старшего по отношению к нему разряда:

$$\sum_{i=m}^{b} 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^{m-i} \le w^{m+d}.$$

Второе свойство присущее только *AM*-системам счисления. Оно состоит в том, что вследствие выполнения универсального аддитивного *L*-преобразования над определенной группой разрядов, их значение становится меньше предельного для данной группы.

Для оценки максимальной длины d переноса в старшие разряды нужно каждый такт сложения разделить на два этапа. Первый этап – сложение отдельных разрядов и получение кода их суммы S_i. Второй этап – прибавление S_i к результату $T_{i\text{-}1}$, полученному на предыдущем такте. Итак, поразрядное сложение можно представить, как прибавление кода S_i к коду $T_{i\text{-}1}$ на каждом i-ом такте.

На первом этапе сложение отдельных разрядов выполняется обычным для позиционных систем счисления способом. Пусть на i-ом такте прибавляются разряды x_i и y_i. При этом может возникнуть переполнение (x_i+y_i>$c_{k\text{-}1}$). Для ликвидации переполнения используется *FAL*-преобразование. *FAL*-преобразование в общем случае вызывает перенос, как в некоторый старший разряд, так и в Δ младших разрядов. Если известна максимальная длина переноса в старшие *dSmax* и в младшие Δ*Smax* разряды от сложения двух отдельных разрядов, то код их суммы можно получить, выполняя *FAL*-преобразование:

$$(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta(S-1)\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max-1})_{i-\Delta S\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max}. \qquad (3)$$

Максимальный перенос будет при сложении разрядов с максимальными цифрами $c_{k\text{-}1}$ и будет представлять собой код *Smax*, что состоит из *dSmax*+1 старших и Δ*Smax* младших разрядов:

$$S\max = 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i = S_{i-\Delta S\max}^{dS\max+\Delta S\max+1}.$$

Нужно отметить, что при $c_{k\text{-}1}$>r_p может быть несколько кодов максимального значения *S*max с разной длиной *dSmax* и разными старшими цифрами $S_{i+dS\max}$ в зависимости от того, над какими разрядами выполнялось полное *AL*-преобразование (3). При минимальном значении $dS\max_{\min}$ старший разряд кода *Smax* будет иметь значение не больше чем $c_{k\text{-}1}$:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\min}-1})_{i+dS\max_{\min}}^{0} \le c_{k-1} \cdot w^{i+dS\max_{\min}}.$$

При максимальном значении $dS\max_{\max}$ старший разряд кода *S*max будет иметь значение не большее чем r_p:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\max}-1})_{i+dS\max_{\max}}^{0} \le r_p \cdot w^{i+dS\max_{\max}}.$$

Для определения $dS\max_{\max}$ нужно выполнить последовательность операций, подобных *EAR*-преобразованию. В отличие от *EAR*-преобразования эти операции должны выполняться даже при переполнении в младших разрядах. Их сущность состоит в том, что выполняются последовательные преобразования, начиная с единицы некоторого разряда с переносом в младшие разряды. На каждом шаге преобразования от старшего значимого разряда кода, полученного на предыдущем шаге, отнимается его значение. Эквивалентное значение прибавляется в виде кода в разряды, младшие старшего значащего. Над результатом выполняется *UAL*-преобразование в разряд, младший старшего значащего.

Таким образом, код, который равняется единице некоторого разряда, на каждом шаге смещается вправо и при этом увеличивается. Пусть сначала этот код равен единице некоторого m-го разряда $X_0=w^m$. Тогда на i-ом шаге значения кода будет

$$X_i = UAL^{\tau,p}_{m-\tau p-i}(X_{i-1} - x_{m-i+1} \cdot (w^{m-i+1} - R^{\tau,p}_{m-\tau p-i})),$$

где i=1, 2, 3,... Эти шаги преобразования нужно повторять до тех пор, пока $X_i<2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$. Если после окончания повтора шагов $X_i=2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$, то максимальная длина переноса в старшие разряды при сложении m-ых разрядов $dS\max_{\max}$ равняется количеству шагов преобразования. Если же $X_i>2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$, то $dS\max_{\max}$ на единицу меньше количества шагов преобразования. *А*налогично определяется $dS\max_{\min}$, только начальное значение m-го разряда устанавливается равным максимальной цифре c_{k-1}.

На втором этапе возникает перенос от превышения предельного значения при прибавлении кода отдельных разрядов к промежуточному результату. Он реализуется с помощью *FAL*-преобразования результата сложения S_i и промежуточного результата T_{i-1}, полученного на предыдущем такте. Максимальная длина d этого переноса определяется количеством разрядов, необходимых для поглощения данного и последующих переносов от сложения отдельных разрядов. Общая максимальная длина переноса в старшие разряды $d=d+d$. Следующее утверждение позволяет определить границы, в которых может находиться значение d в произвольной *АМ*-системе счисления.

Утверждение 1. Пусть для *АМ*-системы счисления заданы множество цифр $\{0, 1, ..., c_{k-1}\}$ и аддитивное соотношение ${}^1A^{\tau,p}$. Пусть также для данной системы счисления определены:

$dS\max_{\min}$ – минимальная длина переноса в старшие разряды при сложении максимальных цифр в одном разряде;

dZ – наибольшее количество разрядов, общее максимальное значение которых меньше предельного значения аддитивного соотношения, т. е.,

$$c_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{dZ-1} w^{\tau p-i} < {}^1R_0^{\tau,p} \le c_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{dZ} w^{\tau p-i} . \quad (4)$$

Тогда на любом шаге поразрядного сложения максимальная длина d перенос в старшие разряды находится в пределах

$$d \ge dZ + dS\max_{\min} + H[p],$$

где $H[p]$ – дискретная единичная функция Хевисайда.

Доказательство утверждения 1.

Для доказательства утверждения достаточно привести примеры, в которых при поразрядном сложении в любой *АМ*-системе счисления с длиной переноса в старшие разряды $d<d+dS\max_{\min}+H[p]$ возникает переполнение. Доказательство будет выполняться отдельно для каждого из двух возможных случаев: p=0 и p>0.

В первом случае $H[p]$=0, $dS\max_{\min}>0$ и d=0 по определению (4). Поэтому для доказательства утверждения достаточно привести пример поразрядного сложения, которое вызывает переполнение в любой системе счисления при $d<dS\max_{\min}$. Рассмотрим пример сложения *n-разрядных* кодов с максимальными цифрами

$$c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j + c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j$$

с длиной переноса $d=dS\max_{\min}$-1. При поразрядном сложении данных кодов, начиная со старших разрядов, на первых $dS\max_{\min}$ шагах условие для *FAL*-преобразования не выполняется. На каждом i-ом шаге поразрядного сложения, начиная с $dS\max_{\min}$-го, происходит перенос в старшие разряды, которые не меньше $c_{k-1} \cdot w^{i+dS\max_{\min}}$ по условию определения $dS\max_{\min}$. Это перенос вызывает переполнение в разрядах с i-го по ($i+ dS\max_{\min}$-1)-ый, которое не может быть ликвидировано за счет переноса в младшие разряды, поскольку и в них на следующих тактах происходит переполнение. Итак, для случая p=0 утверждение 1 доказано.

Во втором случае $H[p]$=1. Поэтому для доказательства утверждения достаточно привести пример поразрядного сложения, в котором возникает переполнение при $d<d+dS\max_{\min}+1$. Рассмотрим пример сложения кода

$$c_{k-1} \cdot \sum_{j=n-1-dZ}^{n-1} w^i + c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$$

и кода

$$c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$$

с длиной переноса $d=d+dS\max_{\min}$. При поразрядном сложении данных кодов, начиная со старших разрядов, на шагах от 1-го до ($d+dS\max_{\min}$)-го условие для FAL-преобразования не выполняется. На ($d+dS\max_{\min}+1$)-ом шаге происходит перенос в (n-d-2)-ый разряд, который не меньше c_{k-1} по условию определения $dS\max_{\min}$. Поскольку длина переноса в старшие разряды $d=d+dS\max_{\min}$, то на данном шаге FAL_{n-1}-преобразования уже не может быть выполнено, а условие FAL_{n-2}-преобразования еще не выполняется. Поэтому (n-d-2)-ый разряд суммы будет иметь максимальное значение c_{k-1}. На каждом следующем шаге поразрядного сложения аналогично будет образовываться максимальное значение c_{k-1} очередного разряда суммы. Поэтому, учитывая только перенос в старшие разряды, все полученные разряды кода суммы будут иметь максимальные значения c_{k-1}. При p>0 перенос, который возникает в результате сложения отдельных разрядов, поступает как в старшие, так и в младшие разряды. Т. е., перенос в младшие разряды, который возникает на ($d+dS\max_{\min}+1$)-ом шаге нужно прибавлять на более поздних шагах. Так как без учета переноса в младшие разряды образовывается код суммы с максимальными цифрами, то его учет в некотором разряде вызовет переполнение данного разряда. Это переполнение нельзя ликвидировать за счет переноса в старшие разряды, поскольку они также имеют максимальное значение. Однако это переполнение нельзя ликвидировать за счет переноса в младшие разряды потому, что в них также на следующих тактах будет возникать аналогичное переполнение. Следовательно, в данном примере поразрядного сложения кодов возникает переполнение, которое не может быть ликвидировано при длине переноса в старшие разряды $d<d+dS\max_{\min}+H[p]$. Итак, для случая p>0 утверждение 1 также доказано. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 следует, что при поразрядном сложении максимальная длина переноса d в старшие разряды не меньше чем $d+dS\max_{\min}+H[p]$. При поразрядном сложении выполняется FAL-преобразование переполненного разряда промежуточного результата, которое может приводить к EAR-преобразованию данного разряда. Поэтому длина переноса в младшие разряды не может быть меньшей, чем τp. Разрядность поразрядного сумматора равняется сумме длин переноса в старшие и в младшие разряды. Т. е., для разрядности N поразрядного сумматора в любой AM-системе счисления справедливо выражение:

$$N \geq dZ + dS\max_{\min} + H[p] + \tau p\,. \tag{5}$$

С определенной точностью разрядность поразрядного сумматора определяет аппаратные затраты на его реализацию. Сумматоры являются основной частью всех арифметических устройств. Итак, выражение (5) позволяет сравнивать между собой разные AM-системы счисления по аппаратным затратам на организацию поразрядной обработки.

Выводы

В статье исследованы *AM*-системы счисления, которые обобщают известные и позволяет создавать новые системы счисления с возможностью поразрядного конвейерного выполнения всех арифметических операций, начиная со старших разрядов. Описаны параметры, с помощью которых задают *AM*-системы счисления, и ограничения, которые накладываются на эти параметры. Для *AM*-систем счисления введено понятие аддитивного соотношения. Наиболее просто *AM*-системы счисления задавать с помощью множества цифр C_k и аддитивного соотношения ${}^{t}A^{\tau,p}$.

Исследованы аддитивные превращения в *AM*-системах счисления, которые являются условными арифметическими операциями и обобщают известные операции переноса и заема. Проведена классификация аддитивных преобразований и описаны правила выполнения каждого вида аддитивных преобразований.

На основе аддитивных преобразований исследовано поразрядное сложение в *AM*-системах счисления, начиная со старших разрядов. Такое сложение имеет ограниченную длину переноса в старшие разряды. Впервые сформулировано и доказано утверждение о зависимости длины переноса в старшие разряды при поразрядном сложении от параметров *AM*-системы счисления. Определена также зависимость длины переноса в младшие разряды от параметров *AM*-системы счисления.

Полученные результаты позволили определить зависимость разрядности поразрядного сумматора от параметров *AM*-системы счисления. Используя полученные результаты, можно сравнивать *AM*-системы счисления между собой по аппаратным затратам на организацию поразрядной обработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galli R. Design and evaluation of online arithmetic for signal processing applications on FPGA / R. Galli and A.F. Tenca // in Proc. SPIE Int. Conf. High-Speed Computing, Digital Signal Processing, Filtering Using Reconfigurable Logic, Aug. 2001, pp. 134 – 144.

2. Tanaka M. A high-throughput single-flux-quantum floating-point serial divider using the signed-digit representation / M. Tanaka, K. Obata, K. Takagi, N. Takagi, A. Fujimaki, N. Yoshikawa // IEEE Transaction on Applied Superconductivity, vol. 19, pp. 653 – 656, Jun. 2009.

3. Самофалов К. Г. Основы построения конвейерных ЭВМ. / К. Г. Самофалов, Г. М. Луцкий. – Киев: Высшая школа, 1981. – 234 с.

4. Каляев А. В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. / А. В. Каляев. – М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.

5. Черняк О. І. Методи конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів золотої пропорції / О. І. Черняк, О. Д. Азаров // Вісник ВПІ. – 1996. – №1. – С. 14 – 17.

6. Азаров О. Д.Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів / О. Д. Азаров, О. І. Черняк, П. О. Черняк // Вісник ВПІ. – 2001. – №1. – С. 58 – 64.

Азаров Алексей Дмитриевич – д. т. н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники, директор института информационных технологий и компьютерной инженерии;

Черняк Александр Иванович – старший преподаватель кафедры вычислительной техники.

Винницкий национальный технический университет.