

УДК 519.711

**Б. И. Мокин, д. т. н., проф.; А. В. Писклярова, к. т. н.;
Ю. В. Мокина, к. э. н.**

ИССЛЕДОВАНИЕ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЦЕССА УСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ СПОСОБНЫМ СТУДЕНТОМ

С помощью математических моделей, синтезированных на фазовой плоскости, осуществлено исследование процесса усвоения программы учебной дисциплины способным студентом.

Построены фазовые траектории процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины с помощью преподавателя и самостоятельно.

Ключевые слова: студент, учебная дисциплина, фазовая плоскость, математическая модель.

Эта работа является продолжением исследования процесса усвоения студентом учебной дисциплины на фазовой плоскости в окрестности найденных особых точек [1 – 3], но теперь для способного студента, то есть студента, для которого выполняются условия, приводящие к появлению на фазовой плоскости в области допустимых значений фазовых координат второй особой точки.

Постановка задания и исходные предпосылки

В работе [1] синтезированы математические модели процесса усвоения студентом программы учебной дисциплины на фазовой плоскости в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2\end{aligned}\tag{1}$$

для i -го временного полуинтервала $[t^{(i)})$, в течение которого студент эту учебную дисциплину не изучает, в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 + \beta_{11}x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2\end{aligned}\tag{2}$$

для j -го временного полуинтервала $[t_1^{(j)})$, в течение которого студент приобретает дополнительные знания, общаясь в аудитории с преподавателем, в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 + \beta_{22}x_2\end{aligned}\tag{3}$$

для k -го временного полуинтервала $[t_2^{(k)})$, в течение которого студент приобретает дополнительные знания, работая самостоятельно.

В математических моделях (1), (2), (3) α_{11}, α_{22} – коэффициенты, характеризующие степень забывания студентом материала учебной дисциплины, изученного ранее соответственно с преподавателем и самостоятельно, α_{12}, α_{21} – коэффициенты,

характеризующие синергетическое воздействие друг на друга составляющих процесса усвоения студентом учебного материала с преподавателем и самостоятельно, β_{11}, β_{22} – коэффициенты, характеризующие степень усвоения новых знаний соответственно на занятиях с преподавателем и самостоятельно, а x_1, x_2 – фазовые координаты, задающие в относительных единицах степень усвоения студентом программы учебной дисциплины соответственно на занятиях с преподавателем и самостоятельно, для которых выполняются условия:

$$x_1 = \frac{X_1}{X}, x_2 = \frac{X_2}{X}, \quad (4)$$

$$x_1 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 1, \quad (5)$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

где X – то количество знаний, которое может иметь студент, усвоив в течение определенного времени T все разделы программы определенной учебной дисциплины, X_1 – то количество знаний по данной учебной дисциплине, которое студент получает от преподавателя во время аудиторных занятий, а X_2 – то количество знаний по данной дисциплине, которое студент усваивает, самостоятельно изучая определенные разделы программы.

В этой же работе [1], допуская, что полуинтервалы $[t^{(i)}], [t_1^{(j)}], [t_2^{(k)}]$ следуют друг за другом, и отмечая конечные точки этих полуинтервалов символами $t_{\kappa}^{(i)}, t_{1\kappa}^{(j)}, t_{2\kappa}^{(k)}$, определяем исходные условия, необходимые для однозначного решения систем дифференциальных уравнений (1), (2), (3), в виде:

для системы уравнений (1) –

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(i)} &= x_1(t_{2\kappa}^{(k-1)}), \\ x_{2n}^{(i)} &= x_2(t_{2\kappa}^{(k-1)}), \end{aligned} \quad (6)$$

для системы уравнений (2) –

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(j)} &= x_1(t_{\kappa}^{(i)}), \\ x_{2n}^{(j)} &= x_2(t_{\kappa}^{(i)}), \end{aligned} \quad (7)$$

для системы уравнений (3) –

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(k)} &= x_1(t_{1\kappa}^{(j)}), \\ x_{2n}^{(k)} &= x_2(t_{1\kappa}^{(j)}). \end{aligned} \quad (8)$$

В работе [2] начаты исследования процесса усвоения студентом программы учебной дисциплины на фазовой плоскости с использованием синтезированных математических моделей на заданных полуинтервалах $[t^{(i)}], [t_1^{(j)}], [t_2^{(k)}]$ и определены особые точки $O_l(x_{1o}, x_{2o}), l=1, 2$ фазовой плоскости.

Показано, что все три математические модели имеют одну общую особую точку $O_1(0,0)$ и что каждая модель имеет еще одну особую точку $O_2(x_{1o}, x_{2o})$, причем для модели (1) – это точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, для модели (2) – это точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$, а для модели (3) – это точка $O_2(\frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$. В этой же работе [2] выяснено, если речь идет о студенте, не

одарённого мощными логикой и памятью, то есть о студенте средних способностей, то только его особая точка $O_1(0,0)$ расположена в области допустимых значений фазовых координат, определенной соотношениями (5), поскольку для этого случая справедливы условия

$$\alpha_{11} > \alpha_{12}, \alpha_{22} > \alpha_{21}. \quad (9)$$

Выяснено также и то, когда речь идет о студенте, одарённого мощными логикой и памятью, то в заштрихованной области фазовой плоскости, которая является допустимой по условиям нашей задачи, может находиться не только особая точка $O_1(0,0)$, но и особая точка $O_2(x_{1o}, x_{2o})$, поскольку для этого случая справедливы условия

$$\alpha_{11} < \alpha_{12}, \alpha_{22} < \alpha_{21}. \quad (10)$$

В работе [3] проведено исследование характеристик особых точек на фазовой плоскости и определен характер фазовых траекторий в окрестности этих особых точек для процесса усвоения программы учебной дисциплины студентом средних способностей.

В этой работе продолжим исследования процесса усвоения студентом учебной дисциплины на фазовой плоскости с использованием моделей (1), (2), (3) в окрестности найденных особых точек и построим фазовые траектории этого процесса, но теперь для способного студента, то есть студента, для которого выполняются условия (10), приводящие к появлению на фазовой плоскости в области допустимых значений фазовых координат второй особой точки.

Определение характеристик особых точек моделей способного студента и построение фазовых траекторий в их окрестности

Поскольку на каждом из полуинтервалов $[t^{(i)}], [t_1^{(j)}], [t_2^{(k)}]$ процесс усвоения способным студентом программы учебной дисциплины описывается различными моделями из множества (1), (2), (3), то и характер траекторий на фазовой плоскости в допустимой области значений фазовых координат и характеристики особых точек $O_1(0,0)$, $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ тоже будут отличаться.

Поскольку дифференциальные уравнения линейного приближения в окрестности особой точки $O_1(0,0)$ для всех моделей из множества (1), (2), (3) для способного студента будут такими же, как и для студента средних способностей, то для способного студента при рассмотрении процесса освоения им программы учебной дисциплины на фазовой плоскости относительно характеристик особой точки $O_1(0,0)$ и характера фазовых траекторий в ее окрестности будут справедливыми все те результаты, полученные нами в работе [3] для студента средних способностей. Поэтому те выкладки, которые проделаны в работе [3], относительно особой точки $O_1(0,0)$, в данной работе повторять не будем, а лишь используем их результаты, сконцентрировав свое внимание на определении характеристик особых точек $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ и построении как фазовых траекторий в их окрестности, так и фазовых портретов процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на каждом из вышеуказанных полуинтервалов в целом.

Прежде, чем перейти к рассмотрению характеристик особой точки $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ и построения фазовых портретов на каждом из полуинтервалов $[t^{(i)}], [t_1^{(j)}], [t_2^{(k)}]$ в целом, обратим внимание на одну общую черту этих характеристик, которая заключается в том, что в работе [3] при рассмотрении особой точки $O_1(0,0)$, синтезируя линеаризованные уравнения для моделей (1), (2), (3), просто отбрасывали нелинейные члены $\alpha_{12}x_2x_1$ и $\alpha_{21}x_1x_2$ по тем причинам, что линейные части их разложения в степенные ряды в этой точке равны нулю. Но при разложении в степенные ряды этих нелинейных членов в окрестности особой точки

$O_2(x_{1o}, x_{2o})$ линейные части в этих раскладах уже не будут равны нулю, поэтому их надо учитывать при линеаризации моделей (1), (2), (3). И это будем делать путем разложения в степенной ряд всей правой части каждого уравнения в моделях (1), (2), (3).

Перейдем к анализу на фазовой плоскости процесса усвоения программы учебной дисциплины способным студентом на временном полуинтервале $[t^{(i)}]$, в течение которого студент эту учебную дисциплину не изучает. Особыми точками процесса в этом случае, как показано в работе [2], будут точки фазовой плоскости $O_1(0,0)$ и $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, лежащие в допустимой области (5).

Характеристика особой точки $O_1(0,0)$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности определены в работе [3]: они имеют вид, приведенный на рис. 1а.

Определим теперь характеристику особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности. Для этого нам нужно, как показано в работе [4], линеаризовать в окрестности этой особой точки правую часть уравнений (1). Поэтому, раскладывая в степенной ряд в окрестности этой особой точки правые части уравнений системы (1) и принимая только линейные части, получим:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= -\alpha_{11}x_{1o} + \alpha_{12}x_{2o}x_{1o} + (-\alpha_{11} + \alpha_{12}x_{2o})(x_1 - x_{1o}) + \alpha_{12}x_{1o}(x_2 - x_{2o}), \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= -\alpha_{22}x_{2o} + \alpha_{21}x_{1o}x_{2o} + \alpha_{21}x_{2o}(x_1 - x_{1o}) + (-\alpha_{22} + \alpha_{21}x_{1o})(x_2 - x_{2o}). \end{aligned} \quad (11)$$

А с учетом того, что

$$x_{1o} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, x_{2o} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \quad (12)$$

соотношение (11) можно переписать и так:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} (x_2 - x_{2o}), \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} (x_1 - x_{1o}). \end{aligned} \quad (13)$$

Переходя к системе координат

$$z_1 = x_1 - x_{1o}, z_2 = x_2 - x_{2o}, \quad (14)$$

то есть переместив начало системы координат в особую точку $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ и учитывая соотношение (13), линеаризованную систему уравнений для математической модели (1) в окрестности этой особой точки можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} z_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (15) будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ & & & \alpha_{21} \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \dots & 0 \\ & \alpha_{12} & & \end{bmatrix}, \quad (16)$$

а характеристическое уравнение –

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \dots & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ & & & \alpha_{21} \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \dots & 0 - \lambda \\ & \alpha_{12} & & \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

или

$$\lambda^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = 0. \quad (18)$$

Корнями характеристического уравнения (18) является

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}. \quad (19)$$

Поскольку они являются действительными числами разных знаков, то особая точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ – это «седло».

Для определения характера фазовых траекторий в окрестности этой особой точки разделим второе уравнение системы (15) на первое. В результате получим

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\alpha_{11} z_1}{\alpha_{22} z_2}, \quad (20)$$

или

$$z_2 dz_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1 dz_1. \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), получим

$$z_2^2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1^2 + 2C, \quad (22)$$

где C – постоянная интегрирования, численное значение которой находится из исходных условий (6).

График уравнения (22) является гипербола [5], для построения которой это уравнение удобнее переписать в виде

$$z_2 = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1^2 + 2C}. \quad (23)$$

Из уравнения (23) видно, что гипербола имеет две вершины с координатами $(0, \sqrt{2C})$, $(0, -\sqrt{2C})$ и «усы» в виде прямых:

$$z_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1, \quad (24)$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1. \quad (25)$$

Для определения направления движения точки по гиперболическим фазовым траекториям
 Научные труды ВНТУ, 2011, № 1 5

вернемся к дифференциальным уравнениям (15). Подставляя в них уравнение (24), получим

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}} z_2, \end{aligned} \quad (26)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{z_1} &= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} dt, \\ \frac{dz_2}{z_2} &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (26), (27), получим

$$\ln z_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t + \ln C_1, \quad (28)$$

$$\ln z_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t + \ln C_2, \quad (29)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, численное значение которых определяется исходными условиями (6), причем в областях положительных значений фазовых координат z_1, z_2 эти постоянные будут иметь знаки «плюс», а в области отрицательных значений – знаки «минус».

Уравнение (28), (29) можно переписать еще и так:

$$z_1 = C_1 e^{\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t}, \quad (30)$$

$$z_2 = C_2 e^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t}. \quad (31)$$

Из выражений (30), (31) видно, что с ростом значений времени t числовые значения фазовых координат по абсолютной величине увеличиваются, а это, в свою очередь, означает, что по «усу» (24) фазовая точка движется в направлении от особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ в оба конца.

Проделав все те же выкладки по отношению к «усу» (25), получим, что на нем:

$$z_1 = C_1 e^{-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t}, \quad (32)$$

$$z_2 = C_2 e^{-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} t}. \quad (33)$$

Из выражений (32), (33) видно, что с ростом значений t числовые значения фазовых координат по абсолютной величине уменьшаются, а это, в свою очередь, означает, что по «усу» (25) фазовая точка движется по направлению к особой точке $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ с обоих концов.

Графически все вышеизложенное относительно процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины во временном полуинтервале $[t^{(i)})$ изображено на рис. 1б.

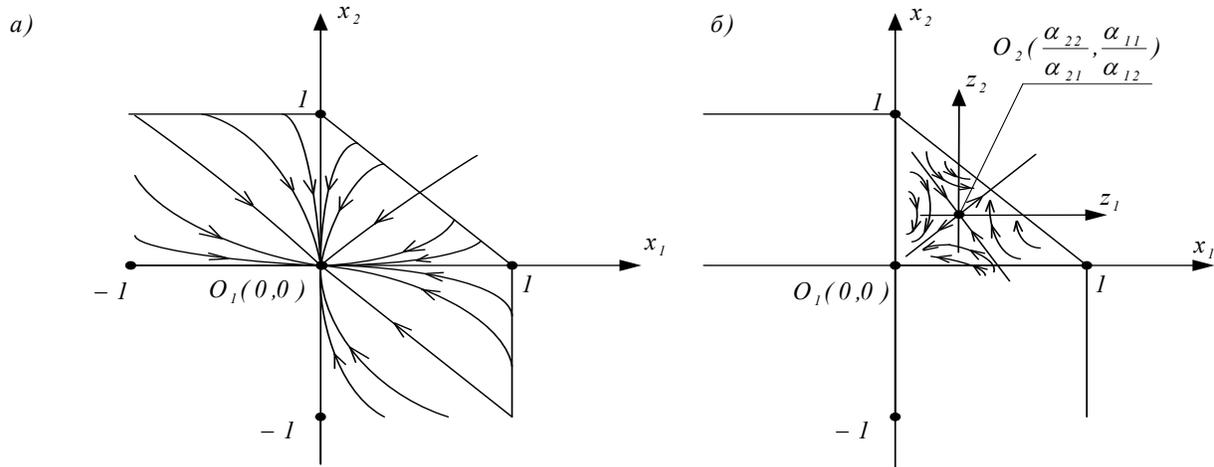


Рис. 1. Фазовые траектории процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент не работает над изучением дисциплины ни с преподавателем, ни самостоятельно, в окрестности особой точки $O_1(0,0)$ и

в окрестности особой точки $O_2\left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right)$

А на рис. 2 изображен фазовый портрет процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент не работает над изучением дисциплины ни с преподавателем, ни самостоятельно, «шитый» из фазовых траекторий (рис. 1).

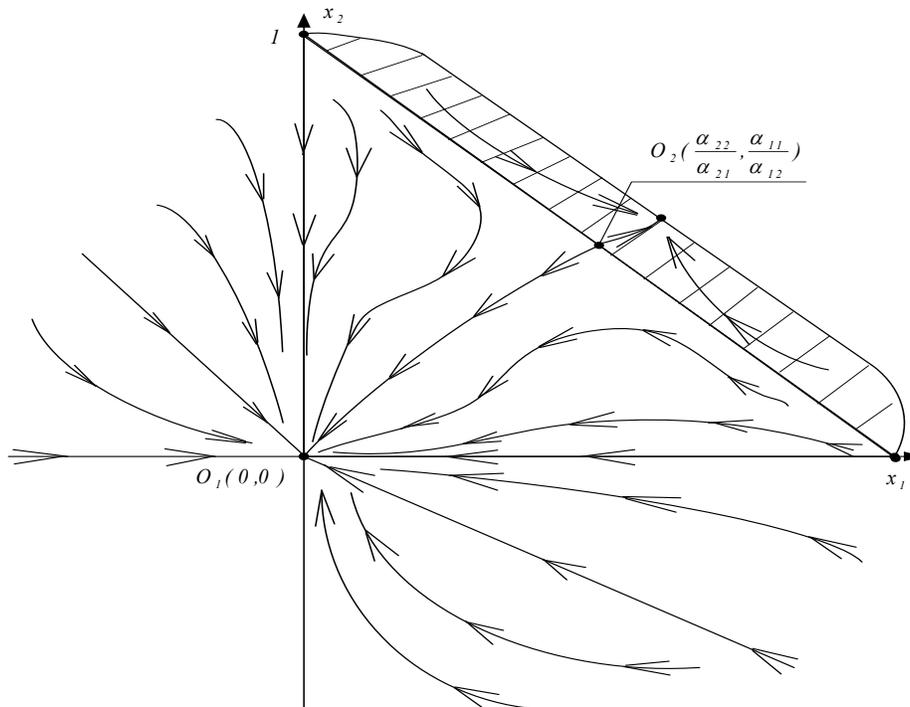


Рис. 2. Фазовый портрет процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент не работает над изучением дисциплины ни с преподавателем, ни самостоятельно

фазовой точки в которую, имеет место процесс, качественно отличающийся от того, что имеет место при попадании фазовой точки в любую другую область фазовой плоскости, поскольку это область, в которой даже без дальнейшей работы с преподавателем или самостоятельно студент за счет синергетического эффекта, обусловленного внутренней подсознательной работой мозга выходит на полное усвоение программы учебной дисциплины. Эту область будем называть областью гениальности, поскольку лишь для очень незначительной части способных студентов она будет иметь место.

Перейдем к анализу на фазовой плоскости процесса усвоения программы учебной дисциплины способным студентом на временном полуинтервале $[t_1^{(j)})$, в течение которого студент приобретает дополнительные знания, общаясь в аудитории с преподавателем. Особыми точками процесса в этом случае, как показано в работе [2], будут точки фазовой плоскости $O_1(0,0)$ и $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$, лежащие в допустимой области (5).

Характеристика особой точки $O_1(0,0)$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности определены в работе [3]: они имеют вид, приведенный на рис. 3а для случая, когда студент «умнее» преподавателя ($\beta_{11} < \alpha_{11}$), и на рис. 3б для случая, когда преподаватель «умнее» студента ($\beta_{11} > \alpha_{11}$).

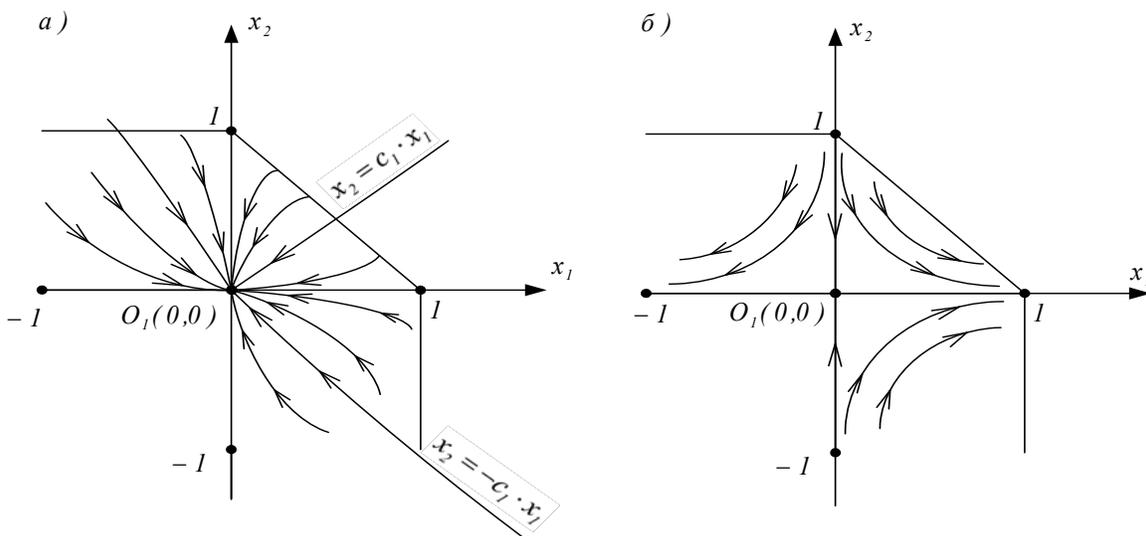


Рис. 3. Фазовые траектории процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины в окрестности особой точки $O_1(0,0)$ на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину с преподавателем и студент умнее преподавателя (а), а также когда преподаватель умнее студента (б)

Определим теперь характеристику особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности. Для этого нам нужно, как и в предыдущем случае, линеаризовать в окрестности этой особой точки правую часть уравнений (2). Поэтому, раскладывая в степенной ряд в окрестности этой особой точки правые части уравнений системы (2) и принимая только линейные части, получим:

$$\begin{aligned} (-\alpha_{11} + \beta_{11})x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= (-\alpha_{11} + \beta_{11})x_{1o} + \alpha_{12}x_{2o}x_{1o} + (-\alpha_{11} + \beta_{11} + \alpha_{12}x_{2o})(x_1 - x_{1o}) + \\ &+ \alpha_{12}x_{1o}(x_2 - x_{2o}), \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= -\alpha_{22}x_{2o} + \alpha_{21}x_{1o}x_{2o} + \alpha_{21}x_{2o}(x_1 - x_{1o}) + (-\alpha_{22} + \alpha_{21}x_{1o})(x_2 - x_{2o}). \end{aligned} \quad (34)$$

А с учетом того, что

$$x_{1o} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, x_{2o} = \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}}, \quad (35)$$

соотношение (34) можно переписать и так:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}(x_2 - x_{2o}), \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}(x_1 - x_{1o}). \end{aligned} \quad (36)$$

Переходя к системе координат z_1, z_2 , по соотношениям (14), то есть перенося начало системы координат в особую точку $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$ и учитывая соотношение (36),

линеаризованную систему уравнений для математической модели (2) в окрестности этой особой точки получаем в том же виде, что и в предыдущем случае, т. е. в виде (15). А это значит, что и для этого случая справедливы все выкладки, начиная с матрицы (16) и вплоть до соотношений для фазовых координат (32), (33).

Поэтому аналогичными предыдущим для этого случая будут и все выводы относительно характеристики особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$ и характера фазовых траекторий в ее окрестности, то есть и в этом случае справедливым является рис. 1б.

“Сшивая” фазовые траектории, приведенные на рис. 3а и рис. 1б, получим фазовый портрет процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину с помощью преподавателя и когда он умнее преподавателя (рис. 4а), а “сшивая” фазовые траектории, приведенные на рис. 3б и рис. 1б, получим фазовый портрет аналогичного процесса, когда преподаватель является умнее студента (рис. 4б).

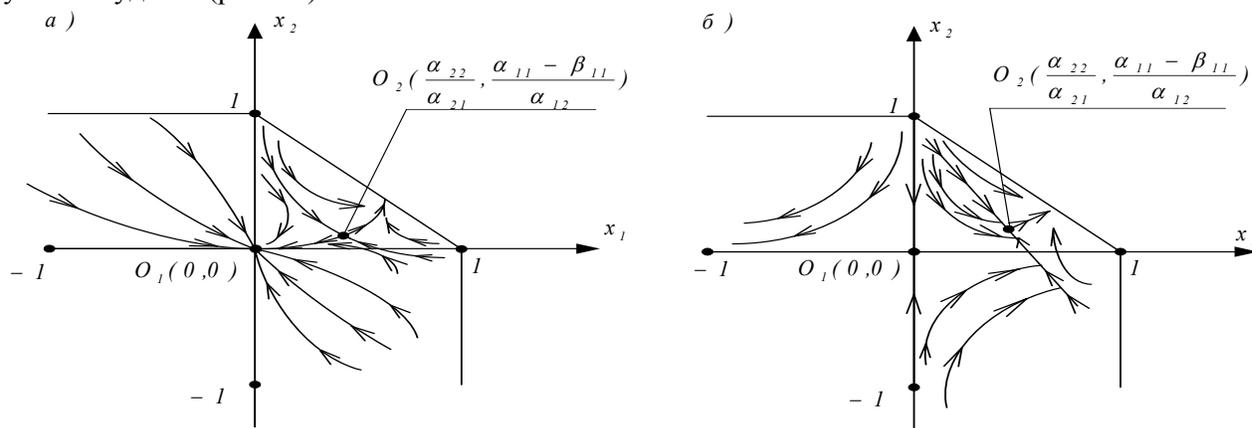


Рис. 4. Фазовые портреты процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину с помощью преподавателя и студент является умнее преподавателя (а), а также когда преподаватель умнее студента (б)

Перейдем к анализу на фазовой плоскости процесса усвоения программы учебной дисциплины способным студентом на временном полуинтервале $[t_2^{(k)})$, в течение которого студент приобретает дополнительные знания, работая самостоятельно.

Особыми точками процесса в этом случае, как показано в работе [2], будут точки фазовой плоскости $O_1(0,0)$ и $O_2(\frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, лежащие в допустимой области (5).

Характеристику особой точки $O_1(0,0)$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности мы определили в работе [3]: они имеют вид, приведенный на рис. 5а для случая, когда студент «умнее», чем учебное пособие ($\beta_{22} < \alpha_{22}$) и на рис. 5б для случая, когда учебное пособие «умнее», чем студент ($\beta_{22} > \alpha_{22}$).

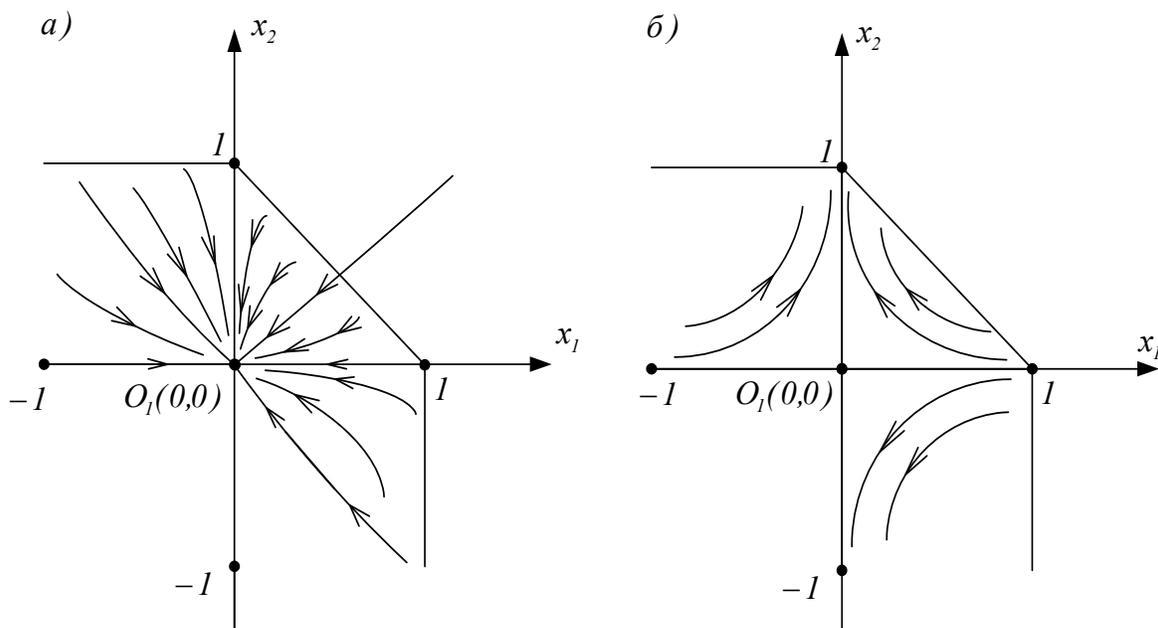


Рис. 5 Фазовые траектории процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины в окрестности особой точки на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину самостоятельно и студент «умнее», чем учебное пособие (а), а также когда учебное пособие «умнее», чем студент (б)

Определим теперь характер особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ и характер фазовых траекторий в ее окрестности. Для этого нам нужно, как и в предыдущих случаях, линеаризовать в окрестности этой особой точки правую часть уравнений (3). Поэтому, раскладывая в степенной ряд в окрестности этой особой точки правые части уравнений системы (3) и принимая только линейные части, получим:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= -\alpha_{11}x_{1o} + \alpha_{12}x_{2o}x_{1o} + (-\alpha_{11} + \alpha_{12}x_{2o})(x_1 - x_{1o}) + \\ &+ \alpha_{12}x_{1o}(x_2 - x_{2o}), \\ (-\alpha_{22} + \beta_{22})x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= (-\alpha_{22} + \beta_{22})x_{2o} + \alpha_{21}x_{1o}x_{2o} + \alpha_{21}x_{2o}(x_1 - x_{1o}) + \\ &+ (-\alpha_{22} + \beta_{22} + \alpha_{21}x_{1o})(x_2 - x_{2o}). \end{aligned} \quad (37)$$

А с учетом того, что

$$x_{1o} = \frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}, x_{2o} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \quad (38)$$

соотношение (37) можно переписать и так:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}} (x_2 - x_{2o}), \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} (x_1 - x_{1o}). \end{aligned} \quad (39)$$

Переходя к системе координат z_1, z_2 , по соотношениям (14), то есть, перенося начало

системы координат в особую точку $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ и учитывая соотношение (39),

линеаризованную систему уравнений для математической модели (3) в окрестности этой особой точки получаем в том же виде, что и в предыдущих случаях, т. е. в виде (15), с той лишь разницей, что в первом уравнении вместо коэффициента α_{22} стоит коэффициент $\alpha_{22} - \beta_{22}$. А это значит, что и для этого случая справедливы все выкладки, начиная с матрицы (16) и вплоть до соотношений для фазовых координат (32), (33), в которых вместо коэффициента α_{22} поставлен коэффициент $\alpha_{22} - \beta_{22}$.

Но благодаря этому изменению, значения указанных коэффициентов аналогичны предыдущим для этого случая будут лишь те выводы относительно характеристики особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ и характера фазовых траекторий в ее окрестности, которые касаются только студента «умнее», чем учебное пособие. Именно в этом случае фазовые траектории в окрестности указанной особой точки будут иметь тот же характер, что и на рис. 1б, который с новыми координатами особой точки для удобства повторим на рис. 6а.

Что же касается случая, когда учебное пособие является «умнее», чем студент, то в этом случае вместо соотношений (19) получим

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha_{11}(\alpha_{22} - \beta_{22})}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha_{11}(\alpha_{22} - \beta_{22})}, \quad (40)$$

которые при $\beta_{22} > \alpha_{22}$ будут задавать комплексно-сопряженные числа. А вместо уравнения (22) получим уравнение

$$z_2^2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22} - \beta_{22}} z_1^2 + 2C, \quad (41)$$

которое при $\beta_{22} > \alpha_{22}$ будет задавать уже не гиперболу, а эллипс с большой осью на оси z_1 и с направлением движения точки по фазовой траектории «слева-направо» в нижней части и «справа-налево» в верхней (рис. 6б). А сама особая точка $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ в этом случае превращается из «седла» в «центр».

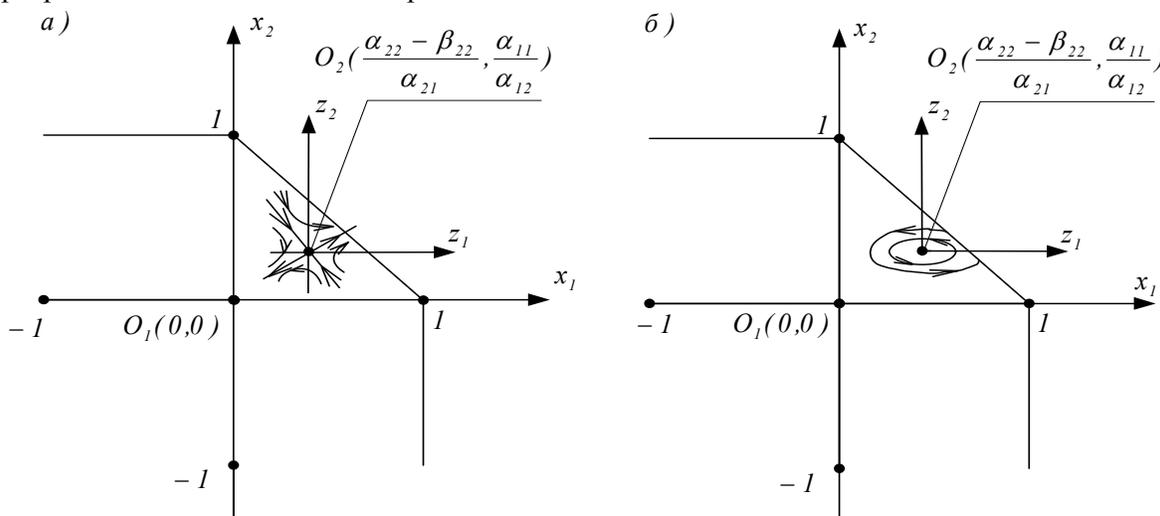


Рис. 6. Фазовые траектории процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины в окрестности особой точки $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину самостоятельно и студент «умнее», чем учебное пособие (а), и когда учебное пособие «умнее», чем студент (б)

«Сшивая» фазовые траектории, приведенные на рис. 5а и рис. 6а, получим фазовый портрет процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину самостоятельно и когда он «умнее», чем учебное пособие (рис. 7а). А «сшивая» фазовые траектории, приведенные на рис. 5б и рис. 6б, получим фазовый портрет аналогичного процесса, когда учебное пособие «умнее», чем студент (рис. 7б).

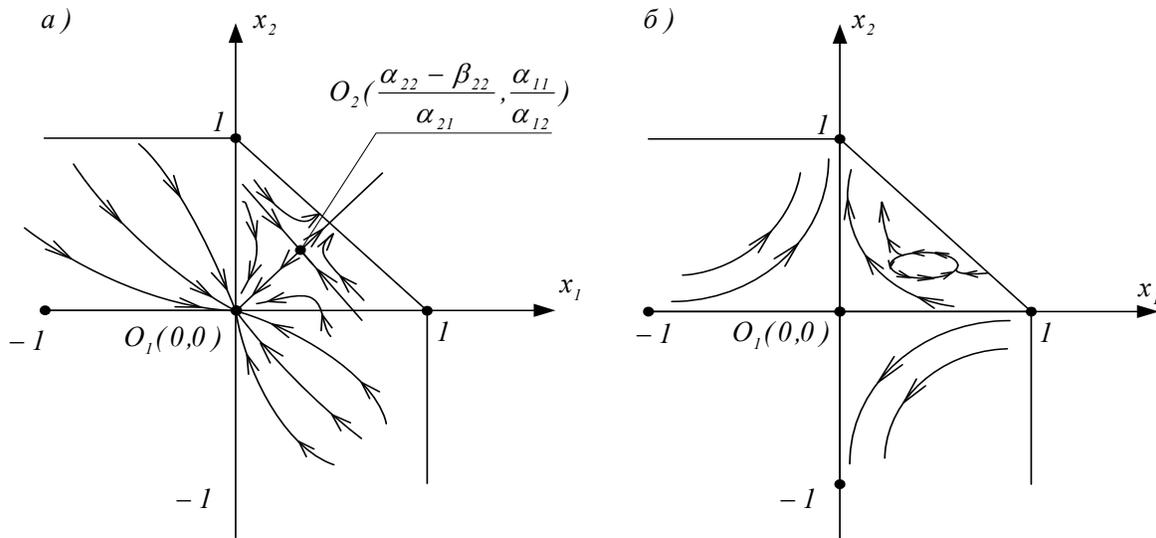


Рис. 7. Фазовые портреты процесса усвоения способным студентом программы учебной дисциплины на отрезке времени, когда студент изучает дисциплину самостоятельно и студент «умнее», чем учебное пособие (а), а также когда учебное пособие «умнее», чем студент (б)

Выводы

1. Фазовые портреты процесса усвоения программы учебной дисциплины способными студентами существенно отличаются от фазовых портретов аналогичного процесса для студентов средних способностей.

2. На фазовых портретах процесса усвоения программы учебной дисциплины способными студентами обнаружена область «гениальности», попадая в которую фазовая точка достигает границы области знаний даже в случаях, когда студент перестает изучать дисциплину и с преподавателем, и самостоятельно.

3. Показано, что область «гениальности» формируется за счет синергетического эффекта на подсознательном уровне, который свойственен лишь наиболее способным студентам и позволяет им самим генерировать те знания, которые они недополучили с преподавателем или с учебным пособием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мокін Б. І. Математичні моделі процесу засвоєння студентом навчальної дисципліни на фазовій площині / Б. І. Мокін, А. В. Пислярова, Ю. В. Мокіна // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 5. – С. 109 – 112.
2. Мокін Б. І. Дослідження характеру особливих точок на фазовій площині процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни / Б. І. Мокін, А. В. Пислярова, Ю. В. Мокіна // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 6. С. 108 – 113.
3. Мокін Б. І. Дослідження на фазовій площині процесу засвоєння програми навчальної дисципліни студентом середніх здібностей / Б. І. Мокін, А. В. Пислярова, Ю. В. Мокіна // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2010. – № 3. С. 40 – 49
4. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – Киев: Высшая школа. – 1984. – 408 с.
5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва: Наука. – 1967. – 608 с.

Мокин Борис Иванович – д. т. н., профессор, академик НАПНУ, профессор кафедры восстановительной энергетики и транспортных электрических систем и комплексов.

Пискаряева Анна Валерьевна – к. т. н., проректор по научно-педагогической работе по организации воспитательного процесса.

Мокина Юлия Викторовна – к. э. н., доцент кафедры менеджмента и моделирования в экономике.

Винницкий национальный технический университет.