

Р. Н. Кветный, д. т. н., проф.; В. Ю. Дементьев

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ

В статье предлагается новое тригонометрическое представление кубических эрмитовых сплайнов, которое позволяет получить более точный результат интерполяции по сравнению с существующими сплайн-методами. Такие результаты достигаются для почти периодических, квазипериодических функций и функций вибрационного резонанса. Приводится краткий обзор методов сплайн-интерполяции и тригонометрической интерполяции. В статье анализируются преимущества и области применения предложенного тригонометрического метода интерполяции. В статье представлены погрешности результатов интерполяции тестовых функций, при применении разработанного и существующих сплайн-методов интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, сплайны, тригонометрическая интерполяция, почти периодический, квазипериодический, вибрационный резонанс.

Вступление

Постоянное развитие аппаратного обеспечения в современном технологическом и информационном мире требует создания и внедрения новых эффективных методов и моделей обработки и представления данных. Это касается всех отраслей современной науки. Эта статья призвана усовершенствовать и расширить применение интерполяции сплайнами. В статье предлагается новый метод интерполяции тригонометрическими сплайнами для обработки дискретных данных, применение которого для почти периодических и квазипериодических функций позволит получить более точные результаты по сравнению с другими методами.

Одно из интересных явлений в математике и теоретической физике, которое относительно недавно начало исследоваться – это вибрационный резонанс (ВР). ВР – квазипериодическое движение (функция), которое представляется как изменение динамической системы и характеризуется объединением конечного количества (два или более) несовместимых сигналов. Под несовместимостью авторы понимают периодические сигналы, кардинально отличающиеся по амплитуде и частоте. ВР возникает при подаче на вход нелинейной системы двух различных периодических сигналов (мощного и слабого). В этом случае слабый сигнал с низкой частотой может быть усилен мощным высокочастотным сигналом. ВР похожий на стохастический резонанс (СР), в котором высокочастотный сигнал заменяют шумом [1]. Нужно отметить, что системы с сигналами двух различных частот встречаются в таких отраслях как связь, акустика [2], нейробиология [3], лазерная физика [4] и т. п. Поэтому задача точной обработки и представления почти периодических и квазипериодических функций актуальна [5 – 8].

Обзор современных методов интерполяции сплайнами

Интерполяция – процесс расчета промежуточных значений неизвестной функции, которая задана сеткой дискретных значений. Интерполяция сплайнами – один из методов интерполяции, который заключается в представлении неизвестной функции между соседними точками дискретной сетки полиномом целой степени [9]. В этом подразделе приводится краткий обзор современных методов интерполяции сплайнами для лучшего понимания их значения в теории обработки дискретных данных и понимания направлений развития современной теории сплайн-интерполяции. Из современных видов интерполяции сплайнами можно выделить следующие виды:

Сплайны с автоматическим изменением коэффициента напряженности

Впервые сплайны с постоянным коэффициентом напряженности были опубликованы Швейкертом (Schweikert) в 1966 году. Позже Ренка (Renka) в 1987 году предложил интерполяцию с использованием гиперболических функций. Для каждого интервала между соседними заданными точками рассчитывается минимальный коэффициент напряженности, при котором выполняются условия непрерывности первой и второй производной в узловой точке интерполяции [10].

Эрмитовые сплайны

На каждом отрезке результирующая кривая является полиномом третьей степени, который строится на основе заданных углов наклона (производных) в узловых точках и условий прохождения полинома через узловые точки. Каждый интервал нормализуется к переменной $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$, $t \in [0, 1]$. Полином эрмитового сплайна для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ запишется как:

$$S_i(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)y_i + (t^3 - 2t^2 + t)m_i + (-2t^3 + 3t^2)y_{i+1} + (t^3 - t^2)m_{i+1},$$

где m_i, m_{i+1} – значения производных в узловых точках (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) соответственно. Для расчета значений m_i используются как точные, так и приближенные методы (сплайн Catmull-Rom).

В-сплайны (Basic splines)

Разработаны и опубликованы в 1970-х годах на основе сплайнов Безье. Сплайны Безье записываются выражением:

$$P_0 f_0(t) + P_1 f_1(t) + P_2 f_2(t) + P_3 f_3(t),$$

где $f_i(t), i = \overline{0;3}$ – функции перехода, которые определяют степень влияния точки на результирующую кривую. Для кривых Безье используется полином Бернштейна [11]. P_0, P_3 – точки начала и конца кривой. P_1, P_2 – точки, определяющие форму результирующей кривой, но не лежат на ней.

NURBS-сплайны (Non-Uniform Rational Basis Spline)

Основное преимущество NURBS-сплайнов – это возможность точного представления кривых и конических поверхностей [12]. Сплайны NURBS дают возможность записать как кривые, так и поверхности с учетом формы, физических (геометрических) или параметрических (математических) требований непрерывности. NURBS-кривая строится не только на основе узловых точек, но и с учетом весовых коэффициентов (определяется для каждой узловой точки). Общая формула NURBS-сплайнов записывается:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)},$$

где ω_i – весовые коэффициенты, P_i – узловые точки, $N_{i,k}$ – нормализованные базисные сплайн-функции степени k .

Сплайны пятого порядка (Quintic Spline)

Созданные для построения плавной и устойчивой к возмущениям базовых точек кривой. Этот вид интерполяции сплайнами имеет непрерывные первые четыре производные на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) . На каждом отрезке интерполирования функция сплайна записывается таким выражением:

$$S(x) = y_i + B_i t + C_i t^2 + D_i t^3 + E_i t^4 + F_i t^5,$$

где $t = x - x_i$, $x_i \leq x < x_{i+1}$, $i = \overline{1, N}$. B_i, C_i, D_i, E_i, F_i – коэффициенты сплайна [13].

Х-сплайны

Бланк (Blanc) и Шлик (Schlick) предложили кардинально новый подход в построении сплайн-функций [14]. Идея заключается в том, что каждая узловая точка P_k влияет на четыре сегмента результирующей кривой, поэтому функция сглаживания F_k не нулевая на четырех последовательных интервалах (F_k становится не нулевой в узле t_{k-2} , максимальной в t_k и нулевой в t_{k+2}). Записывая условия непрерывности первых двух производных в точке t_k для функций сглаживания F_{k-2} и F_{k+2} , Бланк и Шлик выводят следующую формулу Х-сплайнов для отрезка $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, используя базовые точки $P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3}$:

$$C(t) = \frac{A_0(t)P_k + A_1(t)P_{k+1} + A_2(t)P_{k+2} + A_3(t)P_{k+3}}{A_0(t) + A_1(t) + A_2(t) + A_3(t)}, \quad (1)$$

где $A_0(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ – коэффициенты, полученные из условий «пересечения» двух функций сглаживаний F_{k-2} и F_{k+2} . Приведенная формула Х-сплайнов (1) позволяет выполнить аппроксимацию (результатирующая кривая не проходит через заданные точки). Для интерполирования Бланк и Шлик вводят дополнительный параметр $s_k, k \in [0; 1]$. При $s_k = 1$ кривая проходит относительно далеко от точки P_k , если $s_k = 0$, то кривая точно проходит через P_k .

Обзор существующих аналогов метода тригонометрической интерполяции

Поскольку почти периодические и квазипериодические функции формируются на основе суммы периодических сигналов, то естественно перейти от полиномиальной формы записи сплайна к тригонометрической. В публикациях, связанных с интерполированием, довольно часто используются тригонометрические функции для записи сплайнов. Проанализируем наиболее интересные и весомые из них.

Одним из наиболее распространенных методов тригонометрической интерполяции является применение разложения функции в ряд Фурье [15]. Периодическая функция $f(t) = f(t + T), \forall t \in (-\infty; \infty)$, используя преобразование в ряд Фурье, запишется как:

$$f(t) \approx p_n(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j \cdot t) + b_j \sin(j \cdot t)), |a_n| + |b_n| \neq 0,$$

где n – количество учтенных в ряде Фурье слагаемых для интерполяционной формулы сплайна, T – период. Пусть период функции $T = 2\pi$ (выбранное значение легко изменяется введением дополнительного коэффициента). Тогда для описания всей интерполяционной функции достаточно задать сетку точек:

$$f(t_i) = p_n(t_i); i = 0, 1, 2, \dots, 2n; 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2n} \leq 2\pi.$$

Используя упомянутые выше начальные данные значения неизвестных коэффициентов,

a_j и b_j рассчитывают по формулам:

$$a_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \cos(j \cdot t_k); \quad b_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \sin(j \cdot t_k).$$

Основная область применения тригонометрических сплайнов на основе ряда Фурье – это периодические функции. Использование этого метода интерполяции для псевдо или не периодических функций не целесообразно из-за низкой точности результатов по сравнению с применением кубических сплайнов или эрмитовых сплайнов.

Другая форма записи интерполяции сплайнами с использованием тригонометрических функций представлена в [16]. Такой метод интерполяции запишется как:

$$S_i(t) = y_i \left[1 - \frac{1 - \cos(\pi \cdot t)}{2} \right] + y_{i+1} \left[\frac{1 - \cos(\pi \cdot t)}{2} \right], \quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad t \in [0; 1], \quad (2)$$

где $S_i(t)$ – интерполяционный полином функции на промежутке $[x_i; x_{i+1}]$. t – дополнительная нормализованная переменная.

Хотя форма записи (2) очень проста, она содержит серьезный недостаток – значение первой производной интерполированной функции в точках основной сетки равны нулю. Такой недостаток существенно ограничивает применение этой тригонометрической формы записи сплайна в практических задачах.

В статье [17] Роберт Кауфман (Robert F. Kauffmann) предлагает рассчитывать тригонометрический сплайн на основе четырех базовых точек. Тригонометрический сплайн Роберта Кауфмана в матричной форме запишется:

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) - 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) - 1) \end{bmatrix}; \quad P_x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ x_{i+3} \end{bmatrix}; \quad P_y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix}; \quad t \in [0; 1]; \quad (3)$$

$$S_x(t) = P_x^T \cdot F; \quad S_y(t) = P_y^T \cdot F.$$

В выражение (3) вводится и используется искусственная переменная $t \in [0; 1]$. Кроме расчета значения интерполяционной функции $S_y(t)$, также рассчитывается значение аргумента $S_x(t)$ на основе четырех точек сетки заданных значений P_x и P_y .

Этот тип сплайн-интерполяции лучше применять для построения окружности или иных конических фигур. Недостатками сплайна являются плохие интерполяционные характеристики по сравнению с кубическими или эрмитовыми сплайнами; сложность расчета значения интерполяционной функции в заданной точке; невозможность выполнить интерполирование на первом и последнем интервалах сетки заданных значений.

В статье [18] предлагается интерполяция с использованием модифицированных эрмитовых сплайнов. В работе полином эрмитовых сплайнов на каждом отрезке интерполяции предлагается заменить эмпирически выведенными тригонометрическими выражениями (таблица 1):

$$S_i(t) = f_1(t) \cdot y_i + f_2(t) \cdot y'_i + f_3(t) \cdot y_{i+1} + f_4(t) \cdot y'_{i+1}.$$

Приведенный вариант тригонометрического сплайна позволяет для отдельных псевдопериодических функций точнее построить интерполяционную функцию в сравнении с кубическими эрмитовыми сплайнами и задать краевые начальные условия значениям производных высоких порядков. Недостатками этого метода являются эмпирический вывод выражений базовых функций и невозможность применения таких сплайнов в общих

практических задачах.

Проведенный обзор моделей тригонометрических сплайнов раскрывает их общие недостатки – узкую специализацию методов и в некоторых случаях сложность алгоритмизации.

Основная задача этого исследования – совершенствование процесса интерполяции сплайнами, критерии достижения которого заключаются в повышении точности и скорости получения результатов для почти периодических и квазипериодических функций.

Таблица 1

Сравнение выражений базовых функций эрмитовых и тригонометрических сплайнов

Оригинальные базовые функции кубического эрмитового сплайна	Предложенные тригонометрические выражения для базовых функций
$f_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1;$ $f_2(t) = t^3 - 2t^2 + t;$ $f_3(t) = -2t^3 + 3t^2;$ $f_4(t) = t^3 - t^2;$ $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}; t \in [0, 1].$	$f_1(t) = \cos(t)^2;$ $f_2(t) = \sin(t)^2;$ $f_3(t) = 0,096225(\sin(3t) + \sin(t));$ $f_4(t) = 0,096225(\cos(3t) - \cos(t));$ $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{\pi}{2}; t \in [0, \frac{\pi}{2}].$

Основная цель исследования – разработка новой модели тригонометрической сплайн-интерполяции, которая позволит получить более точный результат по сравнению с другими методами для почти периодических и квазипериодических функций без усложнения вычислений.

Модель модифицированного тригонометрического сплайна

Пусть известны значения функции $f(x)$ в заданных точках $f(x_i) = y_i, i = \overline{1, n}$, и значение первых производных в крайних точках $f'(x_1) = R_1, f'(x_n) = R_n$. Для построения модифицированного тригонометрического сплайна возьмем выражение

$$S(t) = a + bt + c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t), t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{\pi}{2}, t \in [0; \pi/2].$$

Переменная x между точками интерполяционной сетки $[x_i; x_{i+1}]$ нормируется к переменной t . Найдем неизвестные коэффициенты a, b, c, d , выразив их через значения функции и ее производных R_i и R_{i+1} в точках интервала интерполяции x_i и x_{i+1} (рис. 1).

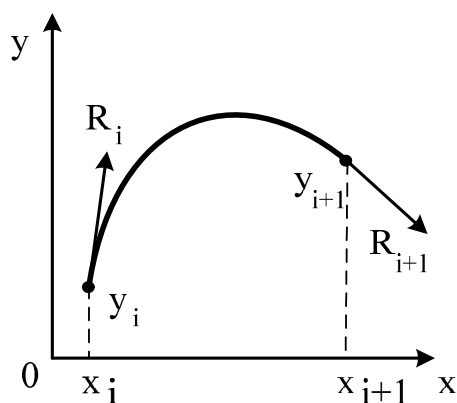


Рис. 1. Модель построения тригонометрического сплайна

Рассчитаем $S(t)$ и $S'(t) = b - c \cdot \sin(t) + d \cdot \cos(t)$ для $t = 0; t = \pi/2$:

$$\begin{aligned} S(0) &= a + c; & S'(0) &= b + d; \\ S(\pi/2) &= a + b \cdot \pi/2 + d; & S'(\pi/2) &= b - c. \end{aligned}$$

Запишем предыдущее выражение в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pi/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A \cdot K = S.$$

Преобразуем предыдущее уравнение к виду $A^{-1} \cdot S = K$. Неизвестные коэффициенты a, b, c, d в матричном виде запишутся как:

$$\frac{1}{(\pi - 4)} \cdot \begin{bmatrix} \pi - 2 & -2 & 2 & \pi - 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -(\pi - 2) \\ 2 & -2 & \pi - 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Подставим полученные значения a, b, c, d в общее выражение сплайна $S(t)$:

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \frac{-2t + 2\sin(t) + (\pi - 2) - 2\cos(t)}{\pi - 4} S(t_i) + \\ &+ \frac{-2 + 2t + 2\cos(t) - 2\sin(t)}{\pi - 4} S(t_{i+1}) + \\ &+ \frac{-2\cos(t) + 2 - 2t + \sin(t) \cdot (\pi - 2)}{\pi - 4} S'(t_i) + \\ &+ \frac{-2t + (\pi - 2) - \cos(t) \cdot (\pi - 2) + 2\sin(t)}{\pi - 4} S'(t_{i+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное выражение и является модифицированным тригонометрическим сплайном. Рассмотрим его особенности. Построим графики для выражений, которые являются коэффициентами $S(t_i)$, $S(t_{i+1})$, $S'(t_i)$ и $S'(t_{i+1})$ для нормированного диапазона изменения параметра $t \in [0; \pi/2]$ (рис. 2). Графики базовых функций $f1(t)$, $f2(t)$, $f3(t)$ и $f4(t)$ подобны графикам базовых функций, которые используются для кубических эрмитовых сплайнов.

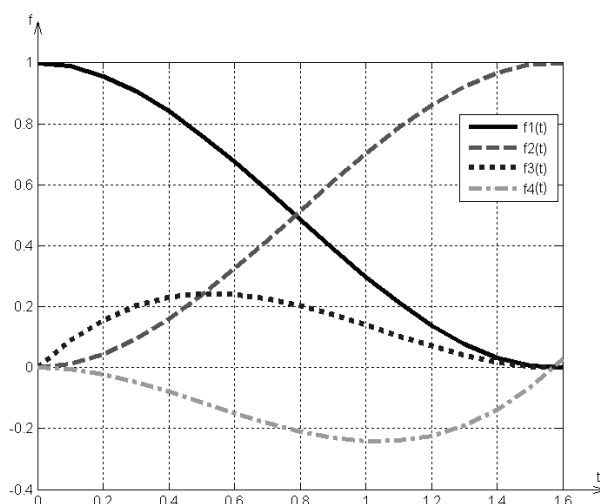


Рис. 2. Графики базовых функций модифицированного тригонометрического сплайна

Вместо кубического полинома для тригонометрических сплайнов используются функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Комбинацией базовых функций с различными коэффициентами достигается необходимая форма результирующей интерполяционной кривой.

В модифицированных тригонометрических сплайнах условие равенства первых производных следующего и предыдущего сплайнов в базовой точке интерполяционной сетки выполняется автоматически.

Для практической проверки разработанных сплайнов использовались приближенный и точный методы расчета значений производных функции в базовых точках. В приближенном методе использовалась следующая формула для оценки производной в точке:

$$S'(t_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right); i = \overline{2; n-1}; S'(t_1) = R_1; S'(t_n) = R_n.$$

Для расчета производных аналитическим (точным) методом использовалось условие равенства второй производной соседних сплайнов в точке базовой сетки. В результате получаем тридиагональную матрицу, для которой разработаны простые, быстрые и эффективные методы решения.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi - 2 & 4 & \pi - 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi - 2 & 4 & \pi - 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \pi - 2 & 4 & \pi - 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ S_3' \\ \dots \\ S_{n-1}' \\ S_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 2S(t_3) - 2S(t_1) \\ 2S(t_4) - 2S(t_2) \\ \dots \\ 2S(t_n) - 2S(t_{n-2}) \\ R_n \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где R_1, R_n – это краевые условия, значение первой производной функции в первой и последней точке интерполирования соответственно.

Тестирование разработанных модифицированных тригонометрических сплайнов

Для тестирования и сравнения результатов работы с другими методами интерполяции предложенные тригонометрические сплайны были реализованы в математическом программном пакете Matlab. Для расчета производных $S'(t_i)$ и $S'(t_{i+1})$ в формуле (4)

формируется и решается система уравнений (5), полученная из условий непрерывности второй производной в общих точках двух соседних сплайнов.

В работе выполнено сравнение результатов интерполяции тестовых функций (таблица 2) разработанными тригонометрическими, кубическими эрмитовыми и кубическими сплайнами. Критерием точности выбрано среднее отклонение от заданной функции. Для тестирования сплайн-методов были выбраны следующие виды функций:

1. Многочлены;
2. Тригонометрические функции;
3. Дробно-рациональные функции;
4. Квазипериодические функции;
5. Квазипериодические функции вибрационного резонанса.

В работе кроме функции вибрационного резонанса для тестирования разработанных сплайнов рассмотрена одна из квазипериодических функций – θ функция. Это аналитическая функция двух переменных $\theta(z, \tau)$, которая определяется рядом:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z),$$

где $z \in \mathbb{C}$ и $\tau \in H$ (H – верхняя полуплоскость $\text{Im}(\tau) > 0$). Как показано в [19], этот ряд абсолютно сходится на любом компактном подмножестве $\mathbb{C} \times H$. Квазипериодичность θ функции проявляется при смещении $z \rightarrow z + \tau$:

$$\theta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \theta(z, \tau).$$

Т. е. функция θ квазипериодична по отношению к отсчетам $\Lambda_\tau \in \mathbb{C}$, созданной 1 и τ . Функция θ при сдвиге на произвольный элемент отсчетов задается формулой:

$$\theta(z + a\tau + b, \tau) = \exp(-\pi i a^2 \tau - 2\pi i a z) \theta(z, \tau).$$

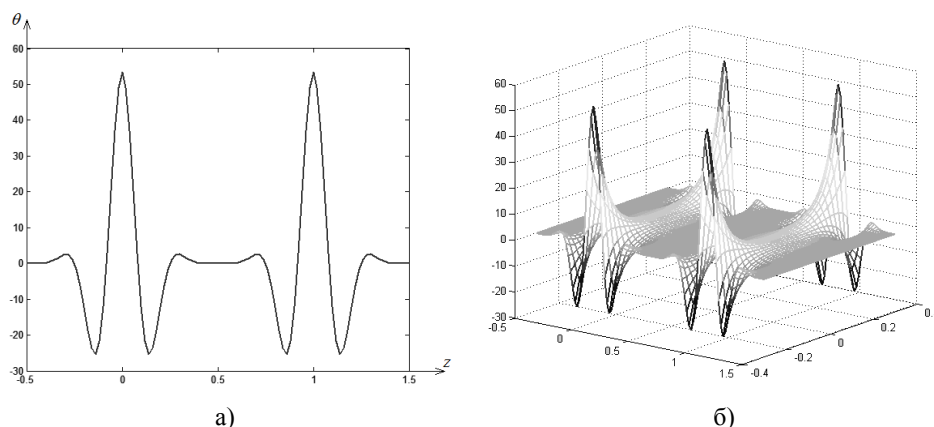
В таблице 2 приведены средние отклонения от тестовых функций в результате сплайн-интерполирования тремя методами. Отмеченные ячейки – лучший результат интерполирования.

Таблица 2

Результаты сплайн-интерполирования тестовых функций тремя методами

#	Test function	Range [-4, 4] Base point step: 0.8			Range [-1, 4] Base point step: 1			Range [-1, 8] Base point step: 1.5		
		Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline
1	$X^*X-1;$	0.2046	0.2503	0.0000	0.1879	0.1785	0.0000	0.0423	0.4834	0.0000
2	$0.5*X^*X-2*X+5;$	0.1023	0.1267	0.0000	0.0940	0.0892	0.0000	0.0197	0.2304	0.0000
3	$X^3+X^2+X-1;$	1.2622	0.8164	0.0000	0.4503	1.0809	0.0000	1.0793	5.6380	0.0000
4	$\sin(X);$	0.0166	0.0547	0.0004	0.0213	0.0807	0.0017	0.0015	0.1306	0.0164
5	$\sin(X-5)/(X-5);$	0.0052	0.0133	0.0001	0.0085	0.0200	0.0006	0.2106	0.1919	0.2512
6	$5*\sin(2*(X-5))/(2*(X-5));$	0.0088	0.0859	0.0210	0.0757	0.1275	0.0983	1.1452	1.2725	1.3286
7	$\cos(X + \pi*\sin(X));$	0.0910	0.0767	0.0978	0.1812	0.1986	0.3667	0.5816	0.4872	0.5845
8	$X*X+6*X*\sin(2.35*X)-X;$	1.2789	2.1681	0.9252	0.8722	2.6891	1.8888	7.8886	10.6902	16.0174
9	$\exp(-X)*X-4*\sin(X)+X*fX$	3.6537	1.7549	0.1794	0.2180	0.5029	0.0251	0.0621	0.7292	0.1060
10	$X^3+X^2+X-1-0.1*X^4;$	1.2622	0.8017	0.0054	0.6073	0.7448	0.0244	0.0791	1.9092	0.0975
11	$\Theta(X);$	20.2603	16.5029	17.2130	51.6280	51.9296	51.9296	30.4656	29.8112	26.3949
12	$X-X^3+\cos(0.3*X)+10*\cos(3*X);$	1.6702	2.5697	2.2968	1.3421	1.7829	3.5551	7.4312	7.8747	8.3363

Для проверки разработанных тригонометрических сплайнов использовалась одномерная θ функция, изображенная на графике, приведенном на рис. 3а.

Рис. 3. Двумерный а) и трехмерный б) графики θ функции

Выводы

Разработан новый метод тригонометрической сплайн-интерполяции, который в отличие от существующих методов позволяет повысить точность интерполирования при обработке почти периодических дискретных данных. При создании нового метода была использована модель построения кубического эрмитового сплайна для уменьшения количества искомых коэффициентов.

Расширена предложенная одномерная модель тригонометрической сплайн-интерполяции для обработки двумерных дискретных данных. Для расчета неизвестных коэффициентов сплайна в работе предлагается приближенный и аналитический подходы.

Выполнена программная реализация предложенного метода в математическом программном пакете Matlab. В работе приведены результаты интерполяции тестовых функций как известными так и разработанным методом. В результате обработки полученных данных сделан вывод, что предложенный метод тригонометрической сплайн-интерполяции имеет лучшие интерполяционные характеристики для почти периодических функций по сравнению с другими методами.

Дальнейшее исследование и развитие задачи обработки почти периодических функций должно происходить в направлении увеличения размерности (числа независимых переменных) и расширения практических задач применения разработанной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benzi R. The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1981. – Volume 14, Number 11. – P. 453 – 457.
2. Maksimov A. O. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation / A. O. Maksimov // *Ultrasonics*. – 1997. – Volume 34, Number 35. – P. 79 – 86.
3. Victor J. D. Two-frequency analysis of interactions elicited by Vernier stimuli / J. D. Victor, M. M. Conte // *Visual Neuroscience*. – 2000. – Number 17. – P. 959 – 973.
4. Su D. C. Simple two-frequency laser / D. C. Su, M. H. Chiu, C. D. Chen // *Precision Engineering*. – 1996. – Volume 18. – P. 161 – 163.
5. Zaikin A. A. Vibrational resonance in a noise-induced structure / A. A. Zaikin, L. López, J. P. Baltanás, J. Kurths, M. A. Sanjuán // *Phys. Rev. E*66. – 2002. – Number 1. – P. 011106 (1 – 4).
6. Baltanás J. P. Experimental evidence, numerics, and theory of vibrational resonance in bistable systems / J. P. Baltanás, L. López, I. I. Blechman, P. S. Landa, A. Zaikin, J. Kurths, M. A. Sanjuán // *F. Phys. Rev. E*67. – 2003. – Number 6. – P. 066119 (1 – 7).
7. Casado-Pascual J. Effects of additive noise on vibrational resonance in a bistable system / J. Casado-Pascual, J. P. Baltanás // *Phys. Rev. E*69. – 2004. – Number 4, part 2. – P. 046108 (1 – 7)
8. Chizhevsky V. N. Vibrational resonance and the detection of aperiodic binary signals / V. N. Chizhevsky, G. Giacomelli // *Phys. Rev. E*77. – 2005. – Number 5. – P. 051126 (1 – 7).
9. Кветний Р. Н. Основи моделювання та обчислювальних методів / Р. Н. Кветний. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 150 с.

10. Renka R. J. Interpolatory tension splines with automatic selection of tension factors / R. J. Renka // SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing. – 1987. – Volume 8. Issue 3. – P. 393 – 415.
11. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design / G. Farin. – San Diego: Academic Press., 1993. – 473 p.
12. Farin G. NURB Curves and Surfaces: From Projective Geometry to Practical Use / G. Farin. – PetersPress, 1995. – 229 p.
13. Herriot J. G. Procedures for Quintic Natural Spline Interpolation. Association for Computing Machinery / J. G. Herriot, C. H. Reinsch // Transactions on Mathematical Software. – 1976. – Volume 2, Number 3, September. – P. 281 – 289.
14. Blanc C. X-Splines: A Spline Model Designed for the End-User / C. Blanc, C. Schlick // Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique. – 1995. – Number 1. – P. 377 – 386.
15. Restrepo J. Introduction to scientific computing / J. Restrepo // Numerical Analysis & Scientific Computing. – 2001. – Number № 1. – P. 128 – 137.
16. Interpolation methods: [Электронный ресурс] / Paul Bourke // Miscellaneous: projection, modelling, rendering – 1999. – № 1. – P. 1. – Режим доступа до журн. : <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/miscellaneous/interpolation/>.
17. Kauffmann R. F. Implementing Uniform Trigonometric Spline Curves. Dobbs Portal / R. F. Kauffmann // Architecture&Design. – 2007. – Number 1. – P. 1 – 9.
18. Кветний Р. Н. Тригонометрична інтерполяція сплайнами / Р. Н. Кветний, В. Ю. Дементьев // Вісник ВПІ. – 2008. – № 5. – С. 67 – 68.
19. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд – М.: Мир. – 1988. – 448 с.

Кветний Роман Наумович – д. т. н., проф., заведуючий кафедрой автоматики и информационно-измерительной техники. E-mail: rkvetny@sprava.net

Дементьев Виктор Юрьевич – аспирант кафедры автоматики и информационно-измерительной техники. E-mail: victor.dementiev@gmail.com. Тел: +38 096 45 98 112. Винницкий национальный технический университет.