

А. П. Мотайло; А. Н. Хомченко, д. ф.-м. н., проф.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО БАЗИСА ШЕСТИУЗЛОВОГО ОКТАЭДРА

В работе средствами матричного исчисления построены полиномиальные базисы второй степени для конечного элемента в виде октаэдра. Полученные функции являются гармоническими по Лапласу. Проанализированы геометрические свойства соответствующих поверхностей уровня.

Ключевые слова: шестиузловой октаэдр, базис, поверхности уровня.

Введение

При численном решении задач методом дискретных элементов широко используют тетраэдры и гексаэдры. В последнее время в пространственных решётках стали использовать октаэдры в сочетании с тетраэдрами. Как следствие, возникла необходимость оснащения октаэдра как конечного элемента собственной системой базисных функций.

Анализ предшествующих публикаций, цель статьи

Задача построения базиса семиузловой октаэдра, узлы которого расположены в его вершинах и барицентре, решена в работах [1, 2]. Авторы [1] предлагают кусочно-линейный базис октаэдра, не вдаваясь в подробности его построения, и применяют его для аппроксимации аналитических функций в задачах объёмной визуализации. Автор [2] строит квадратичный базис, используя тейлоровские разложения функции трёх независимых переменных в сочетании с конечно-разностными схемами. При этом конструкция из гексаэдра и вписанного в него октаэдра используется для решения задач о безвихревом течении идеальных жидкостей в 3D. В некоторых задачах центральный узел не нужен, например, в обобщённой задаче Дирихле для уравнения Лапласа на октаэдре с дискретно заданными условиями на границе. Поэтому возникла идея построения базиса октаэдра с шестью узлами. Первые результаты в этом направлении представлены в работе [3]. Два базиса шестиузловой модели октаэдра (кусочно-линейный и квадратичный) получены из соответствующих базисов семиузловой модели с помощью процедуры конденсации.

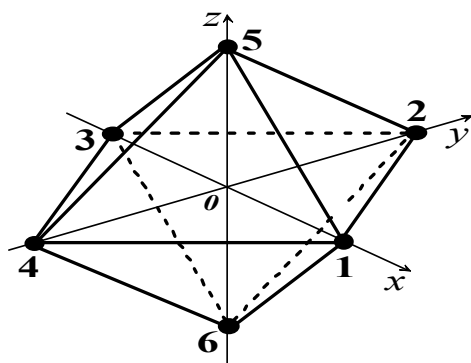
Цель статьи – средствами матричного исчисления построить шестиузловой полиномиальный базис (базисы) октаэдра и исследовать его геометрические свойства.

Основная часть

Рассмотрим октаэдр, центр которого расположен в начале системы координат $Oxyz$, а вершины (узлы) являются точками касания октаэдра описанной сферы единичного радиуса. Координатные оси направлены так, как показано на рис. 1. Предположим, что в каждой точке октаэдра определена некоторая физическая величина Φ (например, температура), причём значения функции $\Phi(x, y, z)$ в узлах октаэдра известны и равны постоянным $\Phi_i (i = \overline{1,6})$. Сформулируем задачу: найти базисные функции $N_i, i = \overline{1,6}$, удовлетворяющие условиям:

$$N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1,6}, \quad \sum_{i=1}^6 N_i = 1, \quad (1)$$

где $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера, i – номер функции, k – номер узла.



$$1 - |x| - |y| - |z| \geq 0.$$

Рис. 1. Октаэдр с 6-ю узлами интерполяции

Составим интерполяционный полином для функции $\Phi(x, y, z)$ в виде полного полинома 2-ой степени:

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz. \quad (2)$$

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа значение функции Φ в любой внутренней точке октаэдра выражается формулой

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 N_i \Phi_i, \quad (3)$$

где $N_i(x, y, z)$ – полиномиальные базисные функции типа Лагранжа. Из условий (1), (3) ясно,

что в центре октаэдра значение интерполяционного полинома $\Phi(0,0,0) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i$. Последнее

равенство позволяет определить свободный коэффициент α_1 формулы (2) как $\alpha_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i$.

Остальные девять неизвестных $\alpha_i (i = \overline{2,10})$ найдём из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{1,3} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i \pm \alpha_2 + \alpha_5 + 0 \cdot \alpha_8 + 0 \cdot \alpha_9 + 0 \cdot \alpha_{10}; \\ \Phi_{2,4} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i \pm \alpha_3 + \alpha_6 + 0 \cdot \alpha_8 + 0 \cdot \alpha_9 + 0 \cdot \alpha_{10}; \\ \Phi_{5,6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i \pm \alpha_4 + \alpha_7 + 0 \cdot \alpha_8 + 0 \cdot \alpha_9 + 0 \cdot \alpha_{10}. \end{cases} \quad (4)$$

Исследуя систему (4) на совместимость, приходим к выводу, что данная система является неопределённой. Причём неизвестные $\alpha_i (i = \overline{2,7})$ определяются однозначно системой равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{1}{2}\Phi_1 - \frac{1}{2}\Phi_3; \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\Phi_2 - \frac{1}{2}\Phi_4; \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}\Phi_5 - \frac{1}{2}\Phi_6; \\ \alpha_5 = \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_3 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^6\Phi_i; \\ \alpha_6 = \frac{1}{2}\Phi_2 + \frac{1}{2}\Phi_4 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^6\Phi_i; \\ \alpha_7 = \frac{1}{2}\Phi_5 + \frac{1}{2}\Phi_6 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^6\Phi_i. \end{array} \right. \quad (5)$$

А неизвестные $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ могут принимать любые действительные значения. Таким образом, интерполяционный полином (2) можно представить в виде:

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 N_i^0(x, y, z)\Phi_i + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz, \quad (6)$$

где функции $N_i^0(i = \overline{1,6})$ определяются так:

$$\begin{aligned} N_{1,3}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2; \\ N_{2,4}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}z^2; \\ N_{5,6}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку равенство $\alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz = 0$ справедливо в любом узле i октаэдра и не зависит от коэффициентов $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$, то, полагая $\alpha_j = \sum_{i=1}^6 \alpha_j^{(i)} \Phi_i$ ($j = 8, 9, 10$), где $\alpha_j^{(i)}(i = \overline{1,6})$ – произвольные действительные числа, интерполяционный полином (6) можно представить в виде (3), где

$$\begin{aligned} N_{1,3} &= N_{1,3}^0 + \alpha_8^{(1),(3)} xy + \alpha_9^{(1),(3)} yz + \alpha_{10}^{(1),(3)} xz; \\ N_{2,4} &= N_{2,4}^0 + \alpha_8^{(2),(4)} xy + \alpha_9^{(2),(4)} yz + \alpha_{10}^{(2),(4)} xz; \\ N_{5,6} &= N_{5,6}^0 + \alpha_8^{(5),(6)} xy + \alpha_9^{(5),(6)} yz + \alpha_{10}^{(5),(6)} xz. \end{aligned} \quad (8)$$

Проверка условия $\sum_{i=1}^6 N_i = 1$ показывает, что равенство

$$\sum_{i=1}^6 (\alpha_8^{(i)} xy + \alpha_9^{(i)} yz + \alpha_{10}^{(i)} xz) = 0 \quad (9)$$

выполняется в любой внутренней точке (x, y, z) октаэдра. А это возможно, если

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_8^{(i)} = \sum_{i=1}^6 \alpha_9^{(i)} = \sum_{i=1}^6 \alpha_{10}^{(i)} = 0. \quad (10)$$

Полученные функции (8) являются гармоническими по Лапласу и совпадают с

квадратичным базисом шестиузлового октаэдра [3] при $\alpha_8^{(i)} = \alpha_9^{(i)} = \alpha_{10}^{(i)} = 0, i = \overline{1,6}$.

Учитывая геометрическую изотропию октаэдра, в зависимости от вида симметрии можно предложить различные способы выбора коэффициентов $\alpha_8^{(i)}, \alpha_9^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, i = \overline{1,6}$ базисных функций как для узлов, расположенных на одной координатной оси, так и для узлов, расположенных по одному на разных координатных осях. Если при конструировании функций формы для противоположных узлов октаэдра использовать зеркальную, осевую и центральную симметрии, получим 4 правила:

Таблица 1

(I): $\begin{cases} N_3(x, y, z) = N_1(-x, y, z); \\ N_4(x, y, z) = N_2(x, -y, z); \\ N_6(x, y, z) = N_5(x, y, -z). \end{cases}$	(II): $\begin{cases} N_3(x, y, z) = N_1(-x, -y, z); \\ N_4(x, y, z) = N_2(x, -y, -z); \\ N_6(x, y, z) = N_5(-x, y, -z). \end{cases}$
(III): $\begin{cases} N_3(x, y, z) = N_1(-x, y, -z); \\ N_4(x, y, z) = N_2(-x, -y, z); \\ N_6(x, y, z) = N_5(x, -y, -z). \end{cases}$	(IV): $\begin{cases} N_3(x, y, z) = N_1(-x, -y, -z); \\ N_4(x, y, z) = N_2(-x, -y, -z); \\ N_6(x, y, z) = N_5(-x, -y, -z). \end{cases}$

Для соседних узлов, принадлежащих одной (любой) из граней октаэдра, существует 4 различных варианта перестановок координат при переходе от одной функции к другой, осуществляемых путём аффинных преобразований системы $Oxyz$, а именно:

Таблица 2

1: $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$	2: $(x, y, z) \rightarrow (-y, z, x)$	3: $(x, y, z) \rightarrow (y, -z, x)$	4: $(x, y, z) \rightarrow (y, z, -x)$
---	--	--	--

Легко увидеть, что при любом наборе правил (по одному из таблиц 1 и 2) число свободных коэффициентов $\alpha_8^{(i)}, \alpha_9^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, i = \overline{1,6}$ можно сократить до трёх $\beta_i, i = \overline{1,3}$, где $\beta_1 = \alpha_8^{(1)}, \beta_2 = \alpha_9^{(1)}, \beta_3 = \alpha_{10}^{(1)}$.

В таблице 3 представлены шестиузловые полиномиальные базисы октаэдра, полученные комбинированием правил из таблиц 1 и 2:

Таблица 3

Конфигурация правил	Базисные функции	Ограничения для $\beta_i, i = \overline{1,3}$	№ формулы
(I,1)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_3xy \pm \beta_1yz \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \pm \beta_3yz \pm \beta_1xz.$	$\beta_i \in R$	(11)
(I,2)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_3xy \mp \beta_1yz \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \pm \beta_3yz \mp \beta_1xz.$	$\beta_i \in R$	(12)
(I,3)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$	$\beta_i \in R$	(13)

	$N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_3xy \mp \beta_1yz \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \mp \beta_3yz \pm \beta_1xz.$		
(I,4)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_3xy \pm \beta_1yz \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \mp \beta_3yz \mp \beta_1xz.$	$\beta_i \in R$	(14)
(II,1)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_3xy \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \pm \beta_3yz.$	$\beta_1 = 0,$ $\beta_2, \beta_3 \in R$	(15)
(II,2)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_3xy \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \pm \beta_3yz.$	$\beta_1 = 0,$ $\beta_2, \beta_3 \in R$	(16)
(II,3)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_3xy \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \mp \beta_3yz.$	$\beta_1 = 0,$ $\beta_2, \beta_3 \in R$	(17)
(II,4)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_2yz \pm \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_3xy \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \mp \beta_3yz.$	$\beta_1 = 0,$ $\beta_2, \beta_3 \in R$	(18)
(III,1)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_1yz \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \pm \beta_1xz.$	$\beta_3 = 0,$ $\beta_1, \beta_2 \in R$	(19)
(III,2)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_1yz \pm \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \mp \beta_1xz.$	$\beta_3 = 0,$ $\beta_1, \beta_2 \in R$	(20)

(III,3)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_1yz \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2xy \pm \beta_1xz.$	$\beta_3 = 0,$ $\beta_1, \beta_2 \in R$	(21)
(III,4)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1xy \pm \beta_2yz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_1yz \mp \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2xy \mp \beta_1xz.$	$\beta_3 = 0,$ $\beta_1, \beta_2 \in R$	(22)
(IV,1)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 + \beta_1xy + \beta_2yz + \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 + \beta_3xy + \beta_1yz + \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 + \beta_2xy + \beta_3yz + \beta_1xz.$	$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$ $\beta_i \in R$	(23)
(IV,2)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 + \beta_1xy + \beta_2yz + \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 - \beta_3xy - \beta_1yz + \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \beta_2xy + \beta_3yz - \beta_1xz.$	$\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0,$ $\beta_i \in R$	(24)
(IV,3)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 + \beta_1xy + \beta_2yz + \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 + \beta_3xy - \beta_1yz - \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \beta_2xy - \beta_3yz + \beta_1xz.$	$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0,$ $\beta_i \in R$	(25)
(IV,4)	$N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 + \beta_1xy + \beta_2yz + \beta_3xz;$ $N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 - \beta_3xy + \beta_1yz - \beta_2xz;$ $N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 + \beta_2xy - \beta_3yz - \beta_1xz.$	$\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0,$ $\beta_i \in R$	(26)

Очевидно, что базисные функции в таблице 3 как частные случаи функций (8) являются гармоническими по Лапласу. При этом функции (23) – (26) удовлетворяют критерию постоянства производной при любых значениях коэффициентов $\beta_i, i = \overline{1,3}$, не противоречащих условиям в таблице 3. Функции (11) – (22) удовлетворяют критерию постоянства производной, если $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, т. е. в случае, когда эти функции совпадают с квадратичным базисом октаэдра [3].

Исследования уравнений (8) при помощи инвариантов показали, что поверхности уровня, соответствующие базисным функциям, могут быть поверхностями гиперболического (однополостный гиперболоид, конус, двуполостный гиперболоид) и параболического типов (гиперболический цилиндр или пара пересекающихся плоскостей). Причем поверхности

уровня являются поверхностями вращения лишь для квадратичного базиса шестиузлового октаэдра [3].

Выводы, перспективы

В работе средствами матричного исчисления получены полиномиальные базисы второй степени шестиузлового октаэдра. Базисные функции являются гармоническими по Лапласу. Изучены геометрические свойства поверхностей уровня, соответствующих базисным функциям. В дальнейшем предполагается исследование интерполяционных качеств полученных базисов октаэдра. Появились все основания полагать, что можно получить альтернативные (возможно, нелинейные) базисы октаэдра с 6-тью узлами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hierarchical Meshes for Volume Data [Электронный ресурс] / R. Grosso, G. Greiner // Computer Graphics International 1998 (CGI'98). – 1998. – Режим доступа до журн.: <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/cgi/cgi1998.html#GrossoG98>.
2. Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
3. Базисы шестиузлового октаэдра : (Материалы международной научно-практической конференции “Перспективные научные исследования”) [Электронный ресурс] / А. П. Мотайло // ”Серия: Математика: Прикладная математика (17 – 25 февраля 2011 г.). София, Болгария. – Режим доступа до журн.: http://www.rusnauka.com/6_PNI_2011/Matemathics/4_79999.doc.htm.

Мотайло Анжелика Павловна – старший преподаватель кафедры высшей математики, тел. (0552)326995, e-mail: akilehzna@ukr.net.

Хомченко Анатолий Никифорович – д. ф.-м. н, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и математического моделирования, тел. (0552)326987, e-mail: mmkntu@gmail.com.

Херсонский национальный технический университет.