УДК 62.50:658.21130

Т. Н. Боровская, к. т. н., доц.; Г. Ю. Дерман; П. В. Северилов

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Поставлена и решена задача замены элементов производственных систем с произвольными структурами оптимальным эквивалентным по входу-выходу агрегированным элементом. Построены вычислительно эффективные модели оптимального агрегирования.

Ключевые слова: *распределенная система, оптимальное агрегирование, производственная функция, модель, производство, технология.*

Постановка проблемы. Производственные системы высокой размерности нуждаются в разработке методов и моделей по оптимизации, что позволяет оптимизировать распределенные производственные системы с большим количеством производственных элементов и продуктов производства. В распределенных системах высокой размерности следует постоянно перераспределять ресурсы, нагрузки так, чтобы оптимизировать глобальный критерий системы, например, суммарный выпуск, суммарные расходы. Распределенные производственные системы имеют довольно сложные структуры: с последовательным и параллельным соединением элементов производства и с обратными связями между этими элементами. Сегодня существуют десятки методов оптимизации таких систем, разработанных для классов с определенными характеристиками производственных элементов – линейных, квадратичных, логарифмических. Большое количество этих классов и отличия характеристик нуждаются в разработке обобщенного метода оптимизации производственных систем высокой размерности.

На рис. 1 приведен пример биореакторных систем, спроектированных и построенных при участии одного из авторов статьи. Проблема модернизации существующих производств является более чем актуальной для птицефабрик, свиноферм, масложиркомбинатов и даже продуктовых рынков.

Рис. 1. Примеры биореакторных систем – элементов экологического замыкания производственных систем

Сегодня во всем мире принимают и реализуют программы «экологической модернизации производства». Биореакторные системы имеют подсистемы с параллельным и последовательным соединением функциональных элементов, биореакторная система является подсистемой, обеспечивающей «экологическое замыкание» технологических процессов определенной производственной системы.

Это научное направление по причине междисциплинарности не имеет удовлетворительных математических моделей и методов оптимизации процессов функционирования и развития таких систем.

Большое количество научных статей по этой проблеме свидетельствует об актуальности и одновременно о сложности решения задачи оптимального распределения ресурсов. Ближайшие по постановке и методологии аналоги [1 – 3] имеют ограничение для функций ограничений и критериев. Сегодня сформировалось направление алгебраизации оптимизационных задач, основанное на сочетании вычислительных методов и классических методов математического анализа. В этой работе описана базовая концепция для построения обобщенного метода оптимизации – представления элементов производственной системы как технологических преобразователей ресурсов «ресурс – продукт», или «расходы – выпуск» (функций производства (ФП)). ФП существующих производственных элементов нелинейные, нестационарные, стохастические, нечеткие. Глобализация, повышение производительности производств делают ресурсы и продукты свободно конвертированными. Будем считать в первом приближении ресурсы и продукты стабильно конвертированными. Это предположение позволяет рассматривать производственные системы как преобразователи ресурсов со скалярными входом и выходом. Таким образом, мы можем применить и разработать для анализа и оптимизации производственных систем методы, подобные методам эквивалентных преобразований в теории автоматического управления (ТАУ). Эти преобразования позволяют заменить произвольную структуру динамической системы управления эквивалентным элементом с отношением "вход-выход".

В ТАУ базовыми элементарными соединениями являются параллельное, последовательное и соединение с обратной связью. Структуры существующих производственных систем и соответствующих задач моделирования тоже отображаются в подобные, но не тождественные структуры: в ТАУ связи между элементами преимущественно информационные, для производственных систем связи являются ресурсными. Выбранный в этой работе подход к решению проблемы представления производственной системы в виде технологического преобразователя ресурсов отличается от аналогов тем, что мы объединяем классическую задачу эквивалентного преобразования также с классической задачей нелинейного программирования о распределении ограниченного ресурса. Такое объединение позволило создать непоисковый, пригодный для произвольных нелинейностей метод для случая параллельного соединения элементов производственной системы – метод оптимального агрегирования.

Получены новые модели производственных систем – *эквивалентные, оптимально агрегированные*. Метод оптимального агрегирования для параллельно соединенных элементов (металлургические агрегаты, биореакторы, котлоагрегаты) теоретически обоснован и программно реализован [4 – 8]. В этой работе ставится задача разработки метода для представления распределенной производственной системы с произвольной структурой единственным элементом – технологическим преобразователем входных ресурсов в конечные продукты, эквивалентным по отношению «вход-выход» первичной распределенной системы. На рис. 2 приведена схема системы задач разработки моделей этой работы как процесса построения системы агрегированных моделей. Элемент новизны работы – *алгебраизация задач оптимизации и встраивание их в модели функционирования и развития* производственных систем.

Определим понятие «производственные системы с произвольными структурами», рассмотрим только три вида базовых связей производственных (технологических) элементов: параллельная, последовательная и обратная связь. Простейший пример обратной связи – синтез стирола: из продукта на выходе реактора выделяют компоненты, которые не прореагировали, и возвращают их на вход. Произвольными считаем структуры, состоящие из произвольного числа подсистем, элементы которых соединены базовыми связями. Из таких произвольных структур исследуем только те, которые есть в реальных производственных системах.

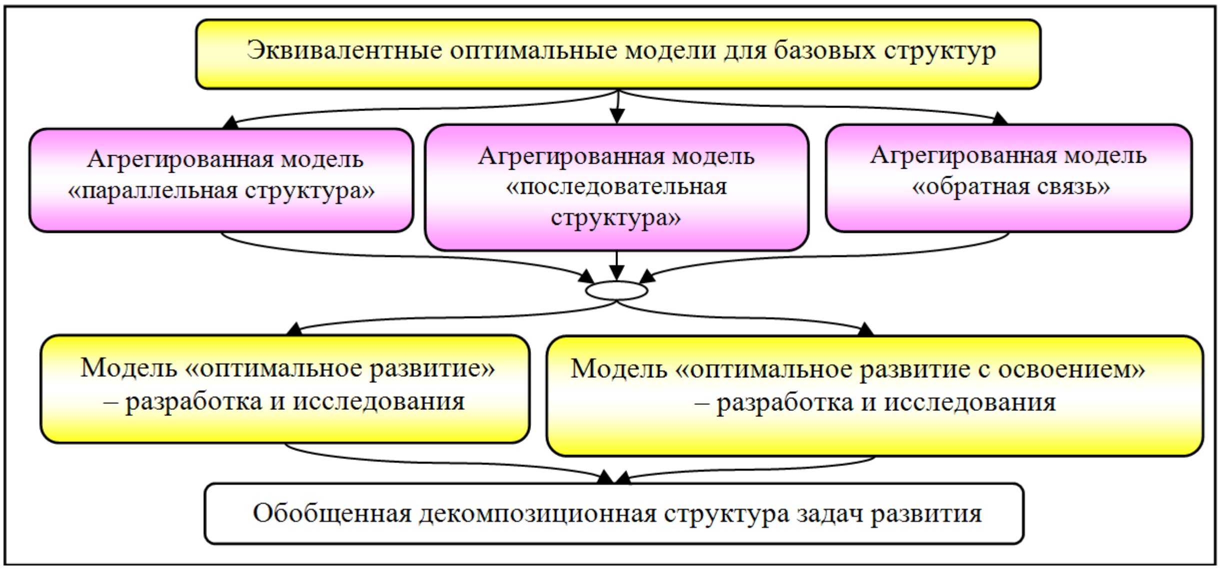

Рис. 2. Схема системы задач разработки моделей

Математическая модель эквивалентной оптимально агрегированной производственной системы с параллельно функционирующими элементами. Рассмотрим прямую задачу – максимизацию суммарного производства при ограничении ресурсов. Задана система из N производственных элементов, использующих некоторый ресурс в количестве x_i и производящих продукцию в количествах: $v_i = f_i(x_i)$; $i = 1, \ldots, N$, где x_i – количество ресурса, выделенного i-му элементу. Необходимо распределить ресурс R так, чтобы максимизировать суммарное производство:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i); \text{ при условии } G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i - R = 0. \qquad (1)$$

Формально эта задача всегда может быть решена методом прямого перебора, вычислительное ограничение – количество параллельно работающих элементов не больше 5 – 7. Метод оптимального агрегирования [4] позволяет выполнить декомпозицию задачи поиска экстремума функции N переменных последовательностью из $(N-1)$ задач нахождения экстремума функций одной переменной [4, 5].

На рис. 3 представлена схема задачи агрегирования системы из параллельных элементов. В верхней части – исходная (первичное состояние) система, в нижней части – схема эквивалентного оптимального элемента. Программный модуль рассчитывает эквивалентный оптимальный элемент, используя суммарный ресурс Xs, и возвращает суммарный оптимальный выпуск продукта Yop.

Нижняя ветвь схемы отражает встроенный модуль оптимального агрегирования, который для заданного ограничения по ресурсу Xs вычисляет оптимальное распределение этого ресурса между элементами производственной системы.

Схемы на рис. 3, 4, 5 – концептуальные, это важный этап конструирования математических моделей. На рис. 3 представлено оптимальное агрегирование системы с параллельными элементами.

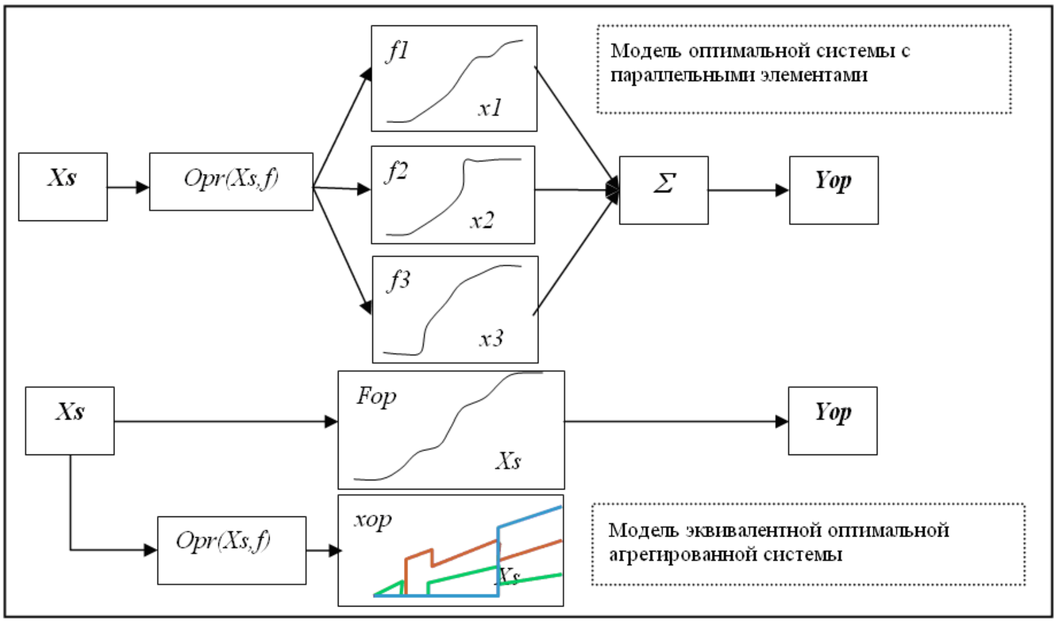

Рис. 3. Оптимальное агрегирование системы с параллельными элементами

Математическая модель эквивалентной оптимально агрегированной производственной системы с последовательно функционирующими элементами. Система с последовательно соединенными элементами существенно отличается от системы с параллельно работающими элементами. Задача оптимизации является сопряженной относительно задачи суммарного выпуска [4, 5]: минимизация суммарных расходов при ограничении на темп производства. Абстрактные модели производственных систем не могут рассматриваться отдельно от содержательных интерпретаций, точнее – от практических задач. Интерпретация задачи – вертикально интегрированная производственная система с разделенным технологическим процессом на технологический и организационный представлена последовательностью субпроцессов.

Продукт на выходе может появиться только после выполнения операций на всех стадиях техпроцесса. То есть, первое условие удовлетворительного функционирования таких систем – согласование пропускной способности (производственной мощности) элементов. На рис. 4 представлена схема агрегирования модели системы с последовательным соединением элементов. В отличие от предыдущей задачи, переменными управления являются объемы ресурсов для создания и поддержки (эксплуатационные расходы) производственных мощностей элементов системы.

Ресурсы же, превращающиеся производственной системой в продукт, являются заданными. На рис. 4 представлено оптимальное агрегирование системы с последовательными элементами. Причем выделена линия технологического преобразования ресурса X в продукт Yop. Для управления используется ресурс Rp.

Формально и эта задача всегда может быть решена методом прямого перебора, однако метод оптимального агрегирования может применяться к производственной системе в случае последовательного соединения, если глобальный критерий является мультипликативным. Для вертикально интегрированных систем главным критерием является надежность функционирования технологической цепочки, которая согласно теории надежности равна произведению надежностей элементов. Согласно принципу оптимальности, который выполняется для этой задачи, сколько бы ресурсов не выделялось для развития производства – этот ресурс должен распределяться оптимально. Заменяем цепочку элементов вертикально интегрированной системы эквивалентным и оптимальным по отображению «вход-выход» элементом.

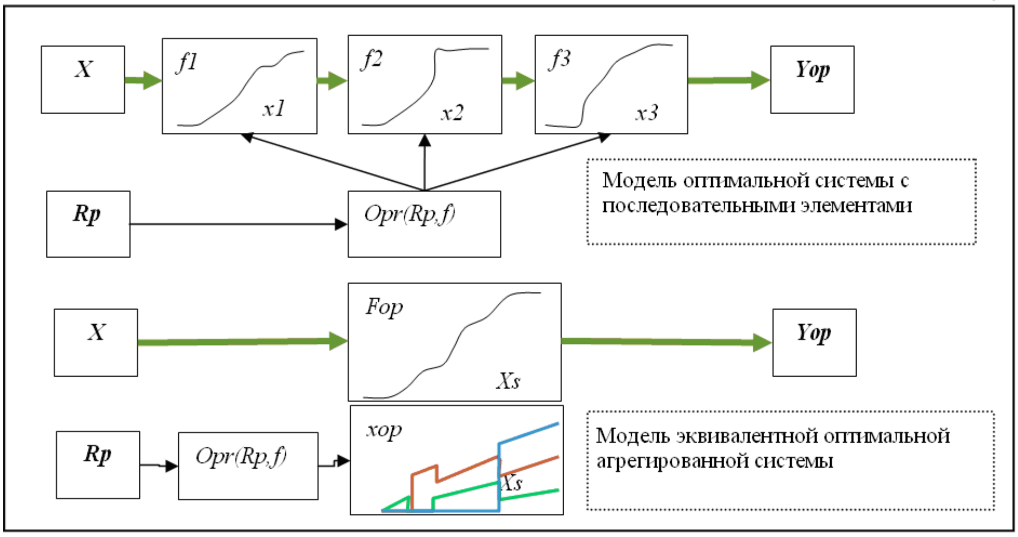

Рис. 4. Оптимальное агрегирование системы с последовательными элементами

Модифицируем этот метод для мультипликативного глобального критерия следующим образом:

– зададим модели производственных функций элементов, локальные критерии и параметры моделей;

– запишем эквивалентную аддитивную модель задачи оптимизации;

– определим для эквивалентной аддитивной задачи оптимальную производственную функцию и вектор-функцию оптимального распределения ресурса;

– вычислим конечные результаты для мультипликативной задачи.

Выполним переход к аддитивной форме критерия оптимизации. Заметим, что для любых алгебраических выражений можно найти преобразование, которое переводит их в аддитивную форму. Типовые математические операции – умножение, деление, дифференцирование, интегрирование и пр. можно свести к аддитивной форме определенными преобразованиями. Это логарифмические преобразования, преобразования Лапласа и Z-преобразования. Для последующего расширения множества критериев и ограничений, для которых существуют преобразования в аддитивную форму, используем методологию геометрического программирования [3], где базовая модель критерия – позином, обобщенный полином вида:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\prod_{j=1}^{m}x_j^{a_{i,j}},\quad x_j\succ 0,\ c_i\succ 0,\ a_{i,j}\in\Re, \tag{2}$$

где $u_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – моном.

Свойства позиномов: если $g(x)$ – позином, $\lambda > 0$ – константа, то $\lambda g(x)$ – позином; если $g(x)$ – позином, $f(x)$ – позином, то $g(x)+ f(x)$ – позином, если $g(x)$ – позином, $u(x)$ – позином, то $u(x)\ g(x)$ – позином, если $g(x)$ – позином, $u(x)$ – моном, то $g(x)/\ u(x)$ – позином.

Позином является базовым понятием в геометрическом программировании. С помощью позиномов описывают и решают задачи широкой области математических проблем, в частности: оптимальное планирование, оптимальное управление, проектные задачи и расчет рисков. В геометрическом программировании нелинейные функциональные зависимости классифицируют по топологическим признакам (монотонно возрастающие и монотонно убывающие), анализируют и упорядочивают результаты алгебраических преобразований монотонных функций, например: $f1+f2$, $f1\cdot f2$, $f1^{f2}$ и больше обобщенное преобразование $f1(f2)$.

Принципиальное отличие обобщенного метода оптимального программирования от метода геометрического программирования в последующем использовании свойств алгебраических операций над монотонными функциями:

– в методе оптимального агрегирования для получения эквивалентной одномерной функции «вход – выход» для технологической системы;

– в методе геометрического программирования для анализа свойств многомерной целевой функции, представленной позиномом.

Рассмотрим задачу оптимального агрегирования для мультипликативного критерия, логарифмируем выражение символьным процессором:

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N1} f(x_i)_i\right) \ \exp and,\ f_i \to \sum_{i=1}^{N1} \ln\left(f(x_i)_i\right). \tag{3}$$

Для определенных классов производственных систем: реакторов химического синтеза, биореакторов, металлургических производств, производства разнообразных баков из пластика и композитов – технологические функции принадлежат к определенным параметрическим классам, в этом случае получим сумму значений функции одного класса, но с разными параметрами.

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N1} f4(R\cdot\alpha_i,\ P_i)\right) \ \exp and,\ f_i \to \sum_{i=1}^{N1} \ln\left(f4(R\cdot\alpha_i,\ P_i)\right), \tag{4}$$

где R – величина ограничения по ресурсу, α_i – безразмерная переменная – часть ресурса для *i*-го элемента, P_i – вектор параметров *i*-той функции, $f4$ – функция определенного класса (в данном случае – *S*-функция [4]), $f4\lg$ – логарифмическая форма функции.

Введем обозначение

$$F4\lg(R,\alpha,P) = \ln\left(f4(R,\alpha,P)\right) = \sum_{i=1}^{N1} f4\lg(R\cdot\alpha_i,\ P_i). \tag{5}$$

Получили критериальную функцию системы (5) в нужном виде для применения метода оптимального агрегирования. Монотонность функции логарифм гарантирует то, что точки экстремума мультипликативной целевой функции и ее аддитивной формы совпадают.

Сформулируем оптимизационную задачу: для каждого заданного R – ограничения ресурса для системы – найти распределение этого ресурса: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, максимизирующее значение критерия (5). Возможна постановка сопряженной оптимизационной задачи: ограничением является заданный выпуск продукта, а критерием – суммарные расходы на создание и поддержку нужного уровня производственных мощностей. Цель оптимизации – минимум суммарных затрат.

В нижней части рис. 4 представлена схема эквивалентного оптимального элемента. Программный модуль, реализующий эквивалентный оптимальный элемент, использует ресурс *Rp* и возвращает соответствующий выпуск продукта *Yop*. Нижняя ветвь схемы отражает встроенный модуль оптимального агрегирования, который для заданного *Rp* вычисляет оптимальное распределение этого ресурса между последовательными элементами производственной системы.

Математическая модель эквивалентной оптимально агрегированной производственной системы с произвольной структурой. Рассмотрим задачу на примере структуры «обратная связь». Агрегирование последовательных и параллельных соединений позволяет свести произвольную структуру, в которой имеются обратные связи, к одноконтурной системе. С учетом нелинейности характеристик элементов получение аналитического выражения для производственной функции эквивалентного оптимального производственного элемента является обычно задачей, которую невозможно решить. Однако разработка оператора оптимального агрегирования для системы с обратной связью в программной среде пакета для моделирования может быть выполнена всегда и за конечное время.

Содержательная интерпретация обратной связи: вместе с нужным для пользователей продуктом производственная система продуцирует некоторые побочные продукты с отрицательной ценностью – отходы. Главный недостаток современного состояния защиты окружающей среды в том, что этапы разработки новых продуктов и разработки средств безопасной утилизации отходов существенно разделены во времени и пространстве. Имеются в виду типичные ситуации: средства утилизации начинают разрабатывать, когда продукт уже выпускают, окружающую среду загрязняют, а посторонняя организация разрабатывает технологии утилизации отходов основного производства.

Сегодня в процессах разработки изделий, технологий и производств широко используют моделирование. Вопросы экологической безопасности и защиты окружающей среды необходимо рассматривать на ранних стадиях внедрения инноваций – на стадии моделирования. Однако это будет только декларацией без разработки и испытаний фактически нового класса интегрированных моделей функционирования и развития производственных систем с учетом аспектов сохранения и защиты окружающей среды.

Сегодня главная стратегическая цель инновационного развития – это замыкание и изоляция всех технологических циклов в пределах именно этого производства. Для планирования инновационного развития нужны рабочие модели производств с отображением обратных связей в технологических процессах. Согласно классической парадигме, модель – это отображение существенных для пользователя свойств реального объекта. В ситуации инновационного развития объект-эталон отсутствует, поэтому необходимо строить ряд моделей, которые усложняются и уточняются, а каждая предыдущая модель является источником информации для построения следующей модели.

В этой статье поданы результаты разработки и исследований моделей первого приближения, которые нуждаются в минимуме эмпирических данных для построения на основе фундаментальных законов, имеющих место в технологических преобразователях. На рис. 5 приведена схема модели с обратной связью. Обратная связь в модели может отображать такие конструкторско-технологические решения:

– противоточные теплообменники для возвращения тепла в технологический цикл;

– обратное водоснабжение – очистка и возвращение воды и растворов в технологический цикл;

– расширение спектра полезных продуктов на базе более полной переработки;

– переработка органических отходов на базе искусственных экологических систем – биореакторов [2].

На рис. 5 приведена схема методики оптимального агрегирования систем с произвольными структурами, которая не отличается от схемы на рис. 4. Разница – в операторе оптимального агрегирования, который берет ограничение ресурса Rp на создание соответствующих производственных мощностей, эксплуатационные расходы, обобщенные производственные функции элементов, а возвращает суммарный оптимальный выпуск продукта Yop. На рис. 5 условно показаны нелинейные функции элементов системы – технологических преобразователей. Все эти функции определены в первом квадранте, ограниченные, нестрого монотонные.

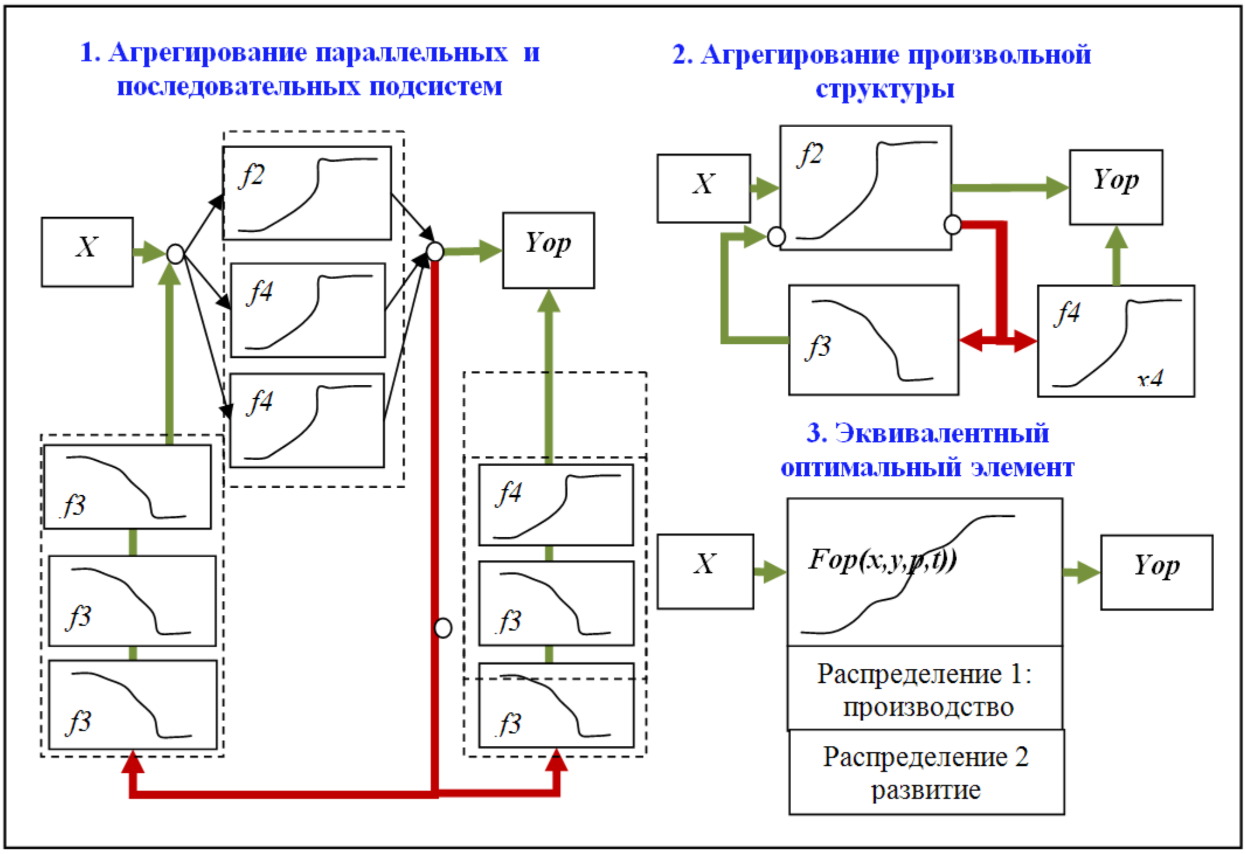

Рис. 5. Схема методики оптимального агрегирования систем с произвольными структурами

Методика получения эквивалентной характеристики нелинейной системы с обратной связью. Рассмотрим замену системы с обратной связью эквивалентным оптимальным элементом на основе оптимального агрегирования. Аналогом является методика получения передаточной функции линейной системы с обратной связью: $W(s) = \dfrac{W1(s)}{1 + W1(s) \cdot W2(s)}$.

Выведем аналогичное выражение для системы со статичными нелинейностями:

$$Y(t) = Y1(t), \tag{6}$$

$$Y2(t) = F2(Y1(t)), \tag{7}$$

$$Y1(t) = F1(X(t) - Y2(t), b1). \tag{8}$$

Ищем: $Y(t) = \textit{зависимость}(X(t))$. Для этого исключим лишние переменные из уравнений (6) – (8), подставим (8) в (6):

$$Y(t) = F1(X(\mathrm{t}) - Y2(t), b1), \tag{9}$$

$Y(t) = \textit{зависимость}(X(t))$; $Y1(t) = F1(X(t) - Y2(t), b1)$.

Подставим (7) в (9) и решим относительно $Y(t)$

$$Y(t) = F1(X(t) - F2(Y(t)), b1). \tag{10}$$

Для примера специально взята кусочно-линейная функция, чтоб показать особенности технологии – необходимость создавать специфические модули для некоторых классов нелинейностей. Разбиваем решение на две части "х меньше ограничения" и "х больше ограничения":

если $|X| \le b$, то $Y(x) := X$, то $Ys = Xs - Xs^3 solve, Ys \to (симв.\ выраж)$. (Xs – переменная "без значения" для символьных вычислений);

если $|X| > b$, то $Y1(x) := k1 \cdot b1$, то $Ys = k1 \cdot b1 solve, Ys \to (симв.\ выраж)$.

Получим характеристику эквивалентного элемента как функцию ресурса производства X, функции ограничения ресурса на развитие Rp и переменных управления $x1, x2, x3$:

$Yn(X) \Rightarrow Yn(X, x1, x2, x3, Rp)$. Делаем постановку и решаем задачу оптимизации:

$Opr(Rp, f1, f2, f3) = \max(Yn(X, x1, x2, x3, Rp))$ при ограничениях $x1 + x2 + x3 = Rp$.

На рис. 6 представлены результаты моделирования для трех значений параметра обратной связи по методике получения эквивалентной характеристики нелинейной системы.

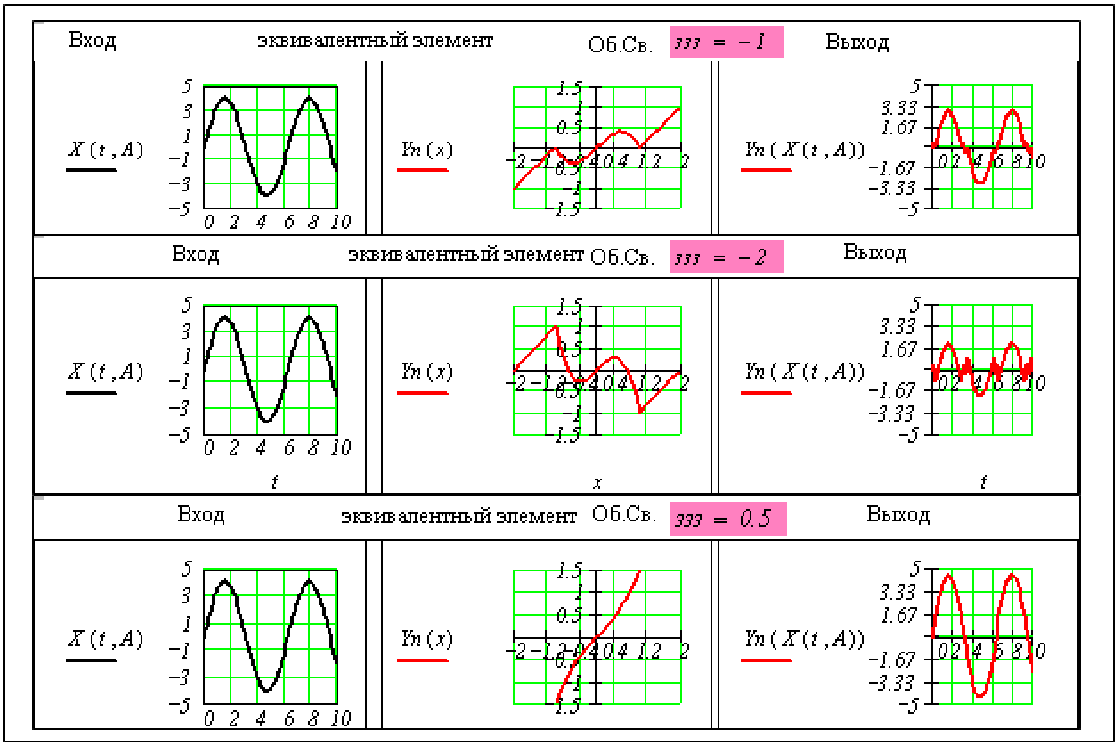

Рис. 6 . Методика получения эквивалентной характеристики нелинейной системы с обратной связью

Обобщенные теоретические модели реализованы в среде математического пакета. Видим сложный характер и динамичность эквивалентной характеристики $Yn(x)$ (средний столбец графиков).

Выделим теперь в представленных моделях и методах новизну, заключающуюся в том, что получен эффективный метод многомерной оптимизации.

Новый класс методов оптимизации производственных систем – методы оптимального агрегирования. Показано, что для систем с параллельным и последовательным соединением производственных элементов задачу оптимизации системы с аддитивным и мультипликативным критериями многомерную задачу можно свести к последовательности одномерных задач оптимизации. В итоге задача многомерной задачи оптимизации сводится к алгебраической задаче – применению бинарного оператора оптимального агрегирования, который не имеет ограничений по виду функций производства. Для каждого вида глобального критерия оптимальности производственной системы нужно создавать свой оператор оптимального агрегирования.

Новый класс моделей производственных систем – оптимальные эквивалентные одномерные модели. Оператор оптимального агрегирования берет пару функций производства и возвращает объект того же класса – оптимальную эквивалентную функцию производства. Оптимально агрегированные модели содержат информацию о характеристиках агрегированных элементов. Оптимально агрегированные модели позволяют по-новому ставить и решать задачи оптимального управления производственными системами. Значительное внимание уделяется примерам, потому что именно использование возможностей пакета для моделирования – необходимое условие получения новых результатов.

Выводы. На теоретическом и прикладном уровнях выполнено обобщение метода оптимального агрегирования на производственные системы с произвольными структурами. Технологии конструирования рабочих моделей производственных систем базируются на нестандартной интеграции возможностей математических пакетов и классических методов – вариационного исчисления, теории динамических систем – позволяют получать эффективные модели оптимизации многомерных систем и решать вопросы экологической безопасности и защиты окружающей среды на ранних стадиях внедрения инноваций – на стадии моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nash J. Optimal allocation of tracking resources / Nash J. // In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. – 1977. – P. 1177 – 80.
2. Ebden M. Decentralized Pre dictive Sensor Allocation / M. Ebden, M. Briers, S. Roberts // In Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. – 2008. – P. 1702 – 1707.
3. Douglass J. Wilde Globally optimal design / J. Douglass. – Wiley, 1978. –288 p.
4. Боровська Т. М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: монографія / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 229 с.
5. Боровська Т. М. Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння: монографія / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов, П. В. Северілов; за заг. ред. Т. М. Боровської. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 255 с.
6. Боровська Т. М. Моделювання та оптимізація у менеджменті: навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2009. – 145 с.
7. Колесник І. С. Моделювання процесів розподілу ресурсів у децентралізованих системах: дис… канд. техн. наук: 01.05.02 / Колесник Ірина Сергіївна. – Вінниця.: ВНТУ, 2006. – 208 с.
8. Колесник І. С. Узагальнені моделі розподілених систем на базі методу оптимального агрегування / І. С. Колесник, Г. Ю. Дерман // Вісник ВПІ. – 2009. – № 2. – С. 41 – 46.

Боровская Таиса Николаевна – к. т. н., доцент кафедры компьютерных систем управления.

Дерман Галина Юрьевна – аспирант кафедры компьютерных систем управления.

Северилов Павел Викторович – соискатель кафедры компьютерных систем управления.

Винницкий национальный технический университет.