

В. А. Касимов, к. физ.-мат. н., доц.

**О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ И КАТЕГОРИЯХ**

*Определено отношение бордантности квазипериодических многообразий таким образом, чтобы инвариант бордизмов типа сигнатуры принимал нетривиальные числовые значения. Построены категории, связанные с асимптотическими представлениями групп.*

**Ключевые слова:** квазипериодический, ориентированный, многообразие, бордизм, дифференциальная форма, функция Морса, измельчение, укрупнение, сигнатура, асимптотическое представление.

Изучение геометрических объектов путем алгебраических методов привело к появлению новых взглядов и теорий как в геометрии, так и в алгебре. Как известно, алгебра функций многообразия несет в себе достаточно полную информацию о данном многообразии. В работе [4] для изучения многообразий предлагается в некотором смысле обратный подход к данному вопросу, а именно: не многообразиям сопоставлять алгебры, а наоборот, алгебрами сопоставлять многообразия, алгебры функций которых изоморфны исходным алгебрам. Понятие квазипериодического ориентированного многообразия обобщает понятие периодического ориентированного многообразия, которое является универсальным покрытием компактного ориентированного многообразия, фундаментальная группа которого изоморфна бесконечной циклической группе  $\mathbf{Z}$ . Данная работа состоит из двух частей. В первой части определено отношение бордантности квазипериодических многообразий таким образом, чтобы инвариант бордизмов типа сигнатуры принимал нетривиальные числовые значения. Вторая часть работы посвящена построению категорий, связанных с асимптотическими представлениями группы.

Интерес к квазипериодическим многообразиям определён тем, что такие многообразия используются в различных задачах топологии и геометрии. Так, например, структура квазипериодических многообразий возникает при рассмотрении поверхностей уровня многозначных функций Морса, задаваемых морсовскими дифференциальными формами с несоизмеримыми периодами [1], [2], [3].

**Основные определения**

*Периодическое многообразие* можно охарактеризовать как такое открытое многообразие  $W_\infty$ , которое представляется в виде объединения исчислимого количества копий  $W_k$ ,  $-\infty < k < \infty$ , компактного ориентированного многообразия  $V$ ,  $\varphi_k: W_k \rightarrow V$ , у которого граница состоит из непересекающихся двух экземпляров многообразия  $M$  с противоположными ориентациями:  $\partial V = M_+ \sqcup M_-$ . Таким образом,  $\partial W_k = M_k^- \sqcup M_k^+$ , а объединение  $W_\infty = \bigcup_k W_k$  заключается в отождествлении точек границы  $M_k^+ \cong M_{k+1}^-$ .

Разумеется, на многообразии  $W_\infty$  свободно действует бесконечная группа  $\mathbf{Z}$  путем сдвига точек с одного слагаемого на другое,  $a(x) = \varphi_{k+1}^{-1} \varphi_k(x)$ ,  $x \in W_k$ ,  $a \in \mathbf{Z}$  образующий элемент. Фактор многообразия под действием группы диффеоморфен многообразию  $V$  после отождествления его точек на границе в силу отождествления  $M^+ \cong M^-$ .

Другими словами, периодическое (ориентируемое) многообразие или, точнее, периодическая структура на многообразии характеризуется следующим набором данных:  
– открытым (ориентируемым) многообразием  $W_\infty$ ;

– разбиением  $W_\infty$  на подмногообразия

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k ; \quad (1)$$

– системой гомоморфизмов (диффеоморфизмов)

$$\varphi_k : W_k \rightarrow V, \quad (2)$$

где  $V$  – ориентированное компактное многообразие с границей, т. е. многообразия  $W_k$  моделируются некоторым (одним) многообразием  $V$ ;

– условиями на покрытие (1):

$$\partial W_k = (W_{k-1} \cap W_k) \sqcup (W_k \cap W_{k+1}) = M_k^- \sqcup M_k^+, \quad (3)$$

$$W_k \cap W_{k+1} = \partial W_k \cap \partial W_{k+1} = M_k^+ = M_{k+1}^-. \quad (4)$$

Набор данных (1), (2), (3), (4) индуцирует свободное действие бесконечной циклической группы  $\mathbf{Z}$  на многообразии  $W_\infty$ , превращая его в тотальное пространство покрытия над компактным многообразием.

Структура квазипериодического многообразия на  $W_\infty$  отличается от структуры периодического многообразия только тем, что гомеоморфизмы (2) заменяются гомеоморфизмами

$$\varphi_k : W_k \rightarrow V_\alpha, \quad \alpha = \alpha(k), \quad (5)$$

где индекс  $\alpha \in A$  пробегает некоторое конечное множество, т. е. многообразия  $W_k$  моделируются несколькими многообразиями  $V_\alpha$ , причем функция  $\alpha = \alpha(k)$  не является постоянной ни на каком интервале  $(-\infty, k]$  или  $[k, \infty)$ . Остальные условия (1), (3), (4) при определении структуры квазипериодического многообразия сохраняются.

Рассмотрим, например, компактное многообразие  $X$  с фундаментальной группой  $\pi_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ . Пусть  $\omega \in \Omega_1(X)$  – замкнутая морсовская форма на многообразии  $X$ . Пусть  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  – универсальное покрытие,  $\tilde{\omega} = p^*(\omega)$ ,  $f$  – функция Морса на покрытии  $\tilde{X}$ ,  $df = \tilde{\omega}$ . Рассмотрим неособенное значение  $c$  функции  $f$  и поверхность уровня  $W_\infty = \{f = c\}$ . Пусть  $a, b \in \pi_1(X)$  – образующие фундаментальной группы, а периоды

$$\lambda_1 = \int_a \omega, \quad \lambda_2 = \int_b \omega$$

– несоизмеримы. Значит, они, по крайней мере, не равны нулю. Пусть  $Y \subset X$  – подмногообразие коразмерности 1 – двойственное, скажем, элементу  $a \in H_1(X; \mathbf{Z})$ . Без ограничения общности можно предположить, что многообразия  $W_\infty$  и  $p^{-1}(Y)$  пересекаются трансверсально, а ограничение функции  $f$  на подмногообразии  $p^{-1}(Y)$  является функцией Морса. Тогда подмногообразие  $p^{-1}(Y)$  разбивает многообразие  $W_\infty$  на компоненты, образующие структуру квазипериодического многообразия.

Структура квазипериодического многообразия может быть подвергнута двум естественным операциям: *измельчению и укрупнению*.

*Измельчение* заключается в том, что многообразия  $V_\alpha$ , в свою очередь, могут быть представлены в виде конечного разбиения типа (1), (5), (3), (4), что позволяет получить более мелкое разбиение многообразия  $W_\infty$ .

*Укрупнение* заключается в том, что по заданной строго монотонной последовательности

$n_k$  с условием, что  $n_{k+1} - n_k < Const$ , в качестве разбиения берутся многообразия  $W'_k = W_{[n_k \dots n_{k+1}-1]}$ .

Пусть  $F$  – левоинвариантный нормализованный функционал на пространстве  $L^\infty(\mathbf{Z})$  ограниченных функций на свободной циклической группе  $\mathbf{Z}$ . Рассмотрим функцию  $s(m)$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ , заданную формулой

$$s(m) = \frac{\text{sign} X_{[k_{n+1} \dots l_{n+1}]} - \text{sign} X_{[k_n \dots l_n]}}{l_{n+1} - k_{n+1} - l_n + k_n - 2}, \quad k_{n+1} \leq m \leq k_n \text{ или } k_n \leq m \leq k_{n+1}.$$

**Теорема 1.** Функция  $s(m)$  ограничена, т. е.  $s \in L^\infty(\mathbf{Z})$  и значение функционала

$$\text{sign}(W_\infty) = F(s)$$

не зависит от выбора подпоследовательностей  $k_n, l_n$ .

Теорема 1 требует дополнительного исследования инвариантности указанного в теореме значения  $\text{sign}(W_\infty)$  по отношению к некоторому отношению бордантности квазипериодических многообразий. Пусть задано квазипериодическое (ориентированное) многообразие  $W_\infty$ , т. е. задана структура квазипериодического многообразия в виде разбиения (1), удовлетворяющего условия (5), (3), (4). Скажем, что многообразие  $W_\infty$  бордантно нулю, если оно является границей другого (ориентированного) многообразия  $P_\infty$ , которое допускает разбиение в виде объединения

$$P_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} P_k,$$

гомеоморфизмы

$$\psi_k: P_k \rightarrow Q_\alpha, \quad \alpha = \alpha(k),$$

которые удовлетворяют условия

$$\partial P_k = (P_{k-1} \cap P_k \sqcup W_k \sqcup (P_k \cap P_{k+1})) = N_k^- \sqcup W_k \sqcup N_k^+,$$

$$P_k \cap P_{k+1} = \partial P_k \cap \partial P_{k+1} = N_k^+ = N_{k+1}^-,$$

$$\partial N_k^+ = M_k^+ = M_{k+1}^- = \partial N_{k+1}^-.$$

Ориентации всех многообразий должны быть согласованы по обычным правилам.

Условия (3), (4), (5) определяют на многообразии  $W_\infty$  структуру так называемого квазипериодического многообразия. Можно определить подходящее отношение эквивалентности таких структур. Другими словами, определив класс так называемых квазипериодических отображений, две структуры квазипериодического многообразия будем считать эквивалентными, если тождественное отображение из одной структуры в другую является квазипериодическим. В частности, рассмотрим некоторую квазипериодическую структуру

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k$$

и некоторое ее укрупнение

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W'_k = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} W_{[n_k \dots n_{k+1}-1]}$$

с условием

$$1 \leq n_{k+1} - n_k \leq \lambda = \text{Const}. \quad (6)$$

Условие (6) означает, что

$$k \leq n_k \leq \lambda k.$$

Таким образом, пусть заданы два квазипериодических многообразия  $W_\infty$  и  $W'_\infty$  со структурой квазипериодических многообразий, описанных условиями (1), (5), (3), (4). Отображение  $f: W_\infty \rightarrow W'_\infty$  называется *квазипериодическим*, если существует последовательность  $n_k$  и константа  $\lambda$ , удовлетворяющие условия:

1.  $1 \leq n_{k+1} - n_k \leq \lambda = \text{Const}$ ;
2.  $f(W_k) \subset W'_{[n_k \dots n_{k+1} + \lambda]}$ ;
3. *Отображения*

$$u_k = (\varphi_k \cup \varphi_{k+1}) \circ f \circ \varphi_k^{-1} : V_{\alpha(k)} \rightarrow \left( \bigcup_{j=n_k}^{n_{k+1} + \lambda} V'_{\alpha'(f)} \right)$$

принимают конечное число значений.

**Теорема 2.** *Тождественное отображение квазипериодической структуры в ее укрупнение является квазипериодическим отображением.*

*Композиция квазипериодических отображений является квазипериодическим отображением.*

*Если квазипериодическое отображение является диффеоморфизмом, то обратное отображение тоже является квазипериодическим.*

Теорема 2 вводит отношение эквивалентности на множестве всех квазипериодических структур. Возникает проблема описания множества классов эквивалентности квазипериодических структур. Мы высказываем гипотезу, что на любом квазипериодическом многообразии имеется только один класс эквивалентных квазипериодических структур. Основанием для такой гипотезы служит следующее соображение. Если многообразие  $W_\infty$  разбито двумя способами в квазипериодические структуры

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W'_k,$$

то каждое подмногообразие  $W'_k$  лежит в конечном объединении  $W'_k \subset \bigcup_{j=n_k}^{m(k)} W_j$ .

Существенным в нашей гипотезе является соображение, что  $m(k) - n(k)$  должно быть ограничено некоторой константой. В противном случае из чисто гомологических соображений многообразия  $W'_k$  не могут быть диффеоморфны друг другу.

### Категории асимптотических представлений

Построим две категории, связанные с асимптотическими представлениями. Первая из них строится следующим образом. Пусть  $A - C^*$  – алгебра с единицей,  $G$  – топологическая (компактная) группа. Обозначим через  $a.R(G, A)$  класс всех асимптотических представлений группы  $G$  в гильбертовых  $C^*$  –  $A$  модулях. Далее,  $M$  и  $L$  – гильбертовы модули над алгеброй  $A$  и заданные  $a.G$  представления  $\Phi = \{\Phi_n : G \rightarrow GL(M)\}_{n \in \mathbb{N}}$  и

$\Psi = \{\Psi_n : G \rightarrow GL(L)\}_{n \in N}$  группы  $G$  в модулях  $M$  и  $L$  соответственно. Каждое  $a.G$  представление  $\Phi$  группы  $G$  в модуле  $M$  естественным образом определяет в модуле  $M$   $a.G$  действие, а именно: семейство  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in N}$ , определенное по формуле  $\varphi_n(g, m) = \Phi_n(g)(m)$ , является  $a.$  действием группы  $G$  в модуле  $M$ . Таким образом,  $(M, \varphi)$  является  $a.G$  модулем. Точно так же определяется  $a.G$  модуль  $(L, \psi)$ . Обозначим через  $a.Hom_A(M, L)$  класс всех  $A$  – гомоморфизмов  $f : M \rightarrow L$ , удовлетворяющих условию С1 работы [3]. Эти же гомоморфизмы будем называть сплетающими гомоморфизмами  $a.$  представлений  $\Phi$  и  $\Psi$  и обозначим это через  $f : \Phi \rightarrow \Psi$ . Множество всех сплетающих гомоморфизмов представлений  $\Phi$  и  $\Psi$  обозначим через  $mor(\Phi, \Psi)$ . Следовательно,

$$mor(\Phi, \Psi) = a.Hom_A(M, L). \quad (7)$$

Легко проверяется справедливость следующих свойств.

**Свойство 1.** Сумма сплетающих гомоморфизмов также является сплетающим гомоморфизмом, т. е. если  $f, g \in mor(\Phi, \Psi)$ , то  $f + g \in mor(\Phi, \Psi)$ .

**Свойство 2.** Если  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  сплетающий гомоморфизм и  $a \in A$ , то  $af$  также является сплетающим гомоморфизмом.

**Свойство 3.** Сплетающие гомоморфизмы образуют подмодуль  $mor_A(\Phi, \Psi)$  в  $A$  модуле  $Hom_A(M, L)$ .

Множество всех сплетающих гомоморфизмов  $a.$  представлений группы  $G$  обозначим через  $a.Mor(G)$ . Пара классов  $(a.R(A, G), a.MorG)$  образует категорию асимптотических представлений и сплетающих гомоморфизмов. Обозначим эту категорию через  $a.R(A, G)_1$ .

Вторая категория асимптотических представлений строится следующим образом. Класс объектов  $a.R(A, G)$  не меняется. Пусть  $\Phi = \{\Phi_n : G \rightarrow GL(M)\}_{n \in N}$  и  $\Psi = \{\Psi_n : G \rightarrow GL(L)\}_{n \in N}$  – два  $a.G$  представления из  $a.R(A, G)$ . Семейство  $\alpha = \{\alpha_n : M \rightarrow L\}_{n \in N}$   $A$ -гомоморфизмов назовем асимптотически сплетающим ( $a.$ -сплетающим) гомоморфизмом  $a.G$  представлений  $\Phi$  и  $\Psi$ , если выполняется следующее условие:

$$\|\alpha_n \circ \Phi_n(g) - \Psi_n(g) \circ \alpha_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Если  $\alpha$  является  $a.$ -сплетающим гомоморфизмом  $a.$ -представлений  $\Phi$  и  $\Psi$ , то это обозначим через  $\alpha : \Phi \sim \Psi$ .

**Предложение 1.** Отношение асимптотической сплетаемости рефлексивно и транзитивно.

Сопоставляя класс морфизмов каждой категории с некоторым группоидом, мы можем трактовать гомоморфизмы группоидов как функторы. Пусть  $(G, G'; \varphi)$  и  $(H, H'; \varphi)$  – группоиды, а  $K_G$  и  $K_H$  – соответствующие категории, а именно: соответствия  $E_G : G \rightarrow MOR(K_G)$  и  $E_H : H \rightarrow MOR(K_H)$  сопоставляют с группоидами  $(G, G'; \varphi)$  и  $(H, H'; \varphi)$  классы морфизмов категорий  $K_G$  и  $K_H$  соответственно. Рассмотрим контрвариантный функтор  $F : K_G \rightarrow K_H$ . Определим гомоморфизм  $F^\# : G \rightarrow H$  следующим образом: если  $F(g) = h$ , то  $F^\#(g) = h$ , где  $E_G : (g) = g$  и  $E_G : (h) = h$ . Тогда для  $\varphi(g_1, g_1) \in G'$  имеем  $F(\varphi(g_1, g_1)) = \psi(F(g_1), F(g_1))$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса / С. П. Новиков // Успехи

математических наук. – 1982. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 3 – 49.

2. Алания Л. А. О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46 – Вып. 3. – С. 179 – 180.

3. Касимов В. А. О связях некоторых новых классов многообразий с теорией категорий / В. А. Касимов // Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана. – Баку. – 2009. – С. 171 – 172.

4. Кассель К. Квантовые группы / К. Кассель. М.: Фазис, 1999. – 666 с.

**Касимов Вагиф Али-Мухтар оглы** – к. физ.-мат. н., доц.; заведующий кафедрой алгебры и геометрии, тел.: (99412) 510-33-64, 465-87-11, E-Mail: kavagif@mail.ru  
Бакинский государственный университет.