УДК 681.541.54

**О. А. Ковалюк, аспирант**

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В МОДЕЛЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

*Проанализированы особенности принятия решений в распределенных системах. Предложена модель принятия решений в системе управления распределенной системой, основанной на использовании теории марковских процессов для уточнения параметров модели.*

***Ключевые слова:*** *принятие решений, распределенная система, марковские процессы.*

Интенсивное развитие компьютерной техники и телекоммуникационных технологий открыли новые возможности для решения **проблемы** принятия решений в распределенных системах. **Актуальность** проблемы обусловлена необходимостью повышения эффективности управления такими распределенными системами, как транспортная система города, сети тепло-, водо-, газоснабжения и другие. Однако повышение мощностей не гарантирует управления с необходимой точностью в реальном масштабе времени, что объясняется главным образом с разветвленной структурой систем, наличием собственных критериев управления у элементов, влиянием неопределенности различного характера, в которой функционирует большинство систем.

В простейших случаях принятия решений в распределенных системах используются методы дискретной математики [1], позволяющие формализовать связи между элементами системы. Однако методы данной группы нашли ограниченное применение из-за неприспособленности к учету неопределенности входных данных. Другой подход к принятию решений в распределенных системах связан с теорией игр, которая имеет мощный математический аппарат для решения прикладных задач [2]. В последнее время все больше внимание специалистов привлекает теория активных систем, главная идея которой заключается в представлении системы в виде взаимодействующих агентов [3]. Недостатком теории игр и теории активных систем является сложность описания связей между элементами, что накладывает ограничения на их использование в системах управления.

Поэтому, возникает **задача** разработки модели принятия решений в распределенных системах, которая б учитывала взаимодействие между элементами системы и описывалась в матричном виде.

Для решения поставленной задачи используем аппарат марковских процессов [4, 5]. Рассмотрим использование данного подхода на примере управления транспортной сетью города.

В работе [6] показано, что система управления перекрестком может быть описана совокупностью одноканальных систем массового обслуживания с ограниченной очередью. Управление такой системой заключается в изменении интенсивностей обслуживания потоков транспортных средств $\mu$ путем корректирования длительности сигналов светофора.

Критерием управления являются средние потери $\overline{G}$, которые рассчитываются как произведение среднего времени пребывания транспортного средства в очереди $\bar{t}$ и средней длины очереди $\bar{r}$

$$\overline{G} = \bar{r} \cdot \bar{t} . \tag{1}$$

Таким образом, модель принятия решений на регулированном перекрестке имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \overline{G}_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} \mu_i \le T \end{cases}, \tag{2}$$

где $\overline{G}_i$ – средние потери $i$-го потока; $\mu_i$ – интенсивность обслуживания $i$-го потока; $k$ – количество потоков (систем массового обслуживания); $T$ – период управления.

В теории массового обслуживания показано, что рассмотренные характеристики системы находятся на основе предельных вероятностей состояний.

Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = 1 \cdot \widetilde{p}(2) + 2 \cdot \widetilde{p}(3) + \ldots + (q-1) \cdot p(q) = \sum_{q=1}^{Q} (q-1) \cdot p(q), \tag{3}$$

где $\widetilde{p}(q)$ – вероятность того, что на перекрестке находится $q$ транспортных средств; $Q$ – максимальное количество транспортных средств в очереди.

Среднее время ожидания в очереди

$$\bar{t} = \widetilde{p}(1)\frac{1}{\mu} + \widetilde{p}(2)\frac{2}{\mu} + \ldots + \widetilde{p}(q)\frac{q}{\mu} = \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{p}(q)\frac{q}{\mu} \tag{4}$$

В связи с тем, что состояние транспортного потока зависит главным образом от состояния потока в предыдущий момент времени, используем аппарат марковских процессов для моделирования поведения потока.

Рассмотрим для примера транспортную сеть, показанную на рис.

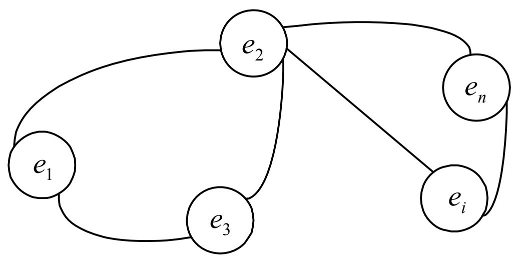


Рис. Фрагмент транспортной сети

Пусть $n$ – количество элементов (очередей транспортных средств), которые определяют общее состояние транспортной системы; $m$ – максимальное количество состояний элементов в системе. Обозначим через $p_{ij}$ вероятность перехода элемента из состояния $S_i$ в состояние $S_j$. Под состоянием элемента $S$ будем понимать количество транспортных средств, находящихся в очереди на перекрестке. Тогда вероятность перехода элемента из одного состояния в другое описывается матрицей

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для элемента транспортной сети марковская цепь будет эргодической, поскольку элемент может перейти в любое из своих состояний за конечное число шагов. Еще одной особенностью данной марковской цепи является неоднородность, обусловленная разной интенсивностью потока на протяжении суток, а значит, и разными значениями $p_{ij}$.

Для неоднородной цепи матрица (5) в фиксированные моменты времени принимает разные значения $P^{(1)}$, $P^{(2)}$,..., $P^{(k)}$. В этом случае элементы матрицы (5) будут функциями состояний других элементов системы. Для системы, показанной на рис., переходные вероятности элемента $e_1$ будут зависеть от состояний элементов $e_2$ и $e_3$ :

$$p_{1ij} = f\left(S_{2\tau_{21}}, S_{3\tau_{31}}\right), \tag{6}$$

где $p_{1ij}$ – вероятность перехода 1-го элемента из состояния $i$ в состояние $j$; $S_{i\tau_{i1}}$ – состояние $i$-го элемента системы, отдаленное на $\tau_{i1}$ назад от текущего момента; $\tau_{i1}$ – время передачи влияния от $i$-го элемента до 1-го элемента, измеренное в шагах работы системы.

Запишем уравнение (6) через вероятности состояний

$$p_{1ij} = \varphi\left(\widetilde{p}_{2\tau_{21}}, \widetilde{p}_{3\tau_{31}}\right) \tag{7}$$

Тогда вероятность перехода в общем виде описывается следующей функцией

$$p_{vij} = \psi\left(\widetilde{P}^{(k)}, \widetilde{P}^{(k-1)}, \ldots, \widetilde{P}^{(0)}, C_v, \mathrm{T}\right), \quad v = 1 \ldots n, \quad i, j = 1 \ldots m, \tag{8}$$

где $\widetilde{P}^{(k)}$ – матрица $n \times m$ вероятностей состояний элементов системы на $k$-м шаге; $C_v$ – 4-мерный массив весовых коэфициетов $[n, m, n+1, m+1]$; $T$ – матрица задержек передачи влияния размером $n \times n$.

Рассмотрим суть приведенных матриц.

Элемент $\widetilde{p}_{ij} \in \widetilde{P}$ определяет вероятность того, что $i$-й элемент находится в $j$-м состоянии. Если максимальное количество состояний $i$-го элемента системы равняется $m_i < m$, то $\widetilde{p}_{ij} = 0, j \in [m_i, m]$.

Элемент матрицы $c_{vij}^{lh} \in C_v$ определяет влияние $h$-го состояния $l$-го элемента на вектор переходных вероятностей $v$-го элемента. Элемент $c_{vij}^{00}$ – вероятность перехода $v$-го элемента с $i$-го в $j$-е состояние без учета влияний других элементов.

Элементы матрицы $\tau_{ij} \in T$ – целые числа, которые показывают через сколько шагов состояние $i$-го элемента будет влиять на состояние $j$-го элемента.

Учитывая зависимость (7) в линеаризованном виде [7], запишем вероятность перехода $\nu$-го элемента с $i$-го в $j$-е состояние

$$p_{vij}^{(k)} = c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \left(c_{vij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{lh})}\right). \tag{9}$$

Для неоднородной марковской цепи вероятность того, что $\nu$-й элемент системы после $k$ шагов будет находиться в $j$-м состоянии, определяется по формуле

$$\widetilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{vi}^{(k-1)} p_{vij}^{(k)} \tag{10}$$

или

$$\widetilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \widetilde{p}_{vi}^{(k-1)} \cdot \left[ c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \left( c_{vij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{ij})} \right) \right] \right\}. \tag{11}$$

Запишем уравнения аналогичные (10) для состояний каждого элемента системы. Полученная система содержит $n \times m$ уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{p}_{11}^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{1i}^{(k-1)} p_{1i1}^{(k)} \\ \widetilde{p}_{\nu j}^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{\nu i}^{(k-1)} p_{\nu ij}^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{p}_{nm}^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{ni}^{(k-1)} p_{nim}^{(k)} \end{cases} \tag{12}$$

Если вероятность перехода элемента в следующее состояние на $k$-м шаге зависит только от состояний на предыдущих шагах, то уравнения системы будут независимыми и решаются отдельно друг от друга. В случае, когда состояние элемента на $k$-м шаге будет зависеть от того, в какое состояние перейдут другие элементы на данном шаге, правая часть уравнений системы (11) буде содержать вероятности с левой части других уравнений.

Выделим в уравнении (11) слагаемое, которое зависит от $k$-го шага.

Получим

$$\widetilde{p}_{\nu j}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{p}_{\nu i}^{(k-1)} \cdot \left[c_{\nu ij}^{00} + \sum_{\substack{l=1 \\ \tau_{l\nu}>0}}^{n} \sum_{h=1}^{m}\left(c_{\nu ij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{l\nu})}\right)\right]\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{p}_{\nu i}^{(k-1)} \cdot \left[c_{\nu ij}^{00} + \sum_{\substack{l=1 \\ \tau_{l\nu}=0}}^{n} \sum_{h=1}^{m}\left(c_{\nu ij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k)}\right)\right]\right). \tag{13}$$

Введем обозначение

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\widetilde{p}_{\nu j}^{(k-1)} \cdot \left[c_{0ij}^{(\nu)} + \sum_{i=1, k_{ij}\neq\tau_{ij}}^{n} \sum_{j=1}^{m}\left(c_{ij}^{(\nu)} \cdot \widetilde{p}_{ij}^{(\tau_{ij})}\right)\right]\right\} + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{p}_{\nu j}^{(k-1)} \cdot c_{\nu ij}^{00}\right) = b_{\nu j}.$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\widetilde{p}_{\nu j}^{(k)} - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{\nu i}^{(k-1)} \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ \tau_{l\nu}=0}}^{n} \sum_{h=1}^{m}\left(c_{\nu ij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k)}\right) = b_{\nu j}, \tag{14}$$

а система (11) перепишется следующим образом

$$\begin{cases} \tilde{p}_{1j}^{(k)} - \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{p}_{1i}^{(k-1)} \cdot \sum\limits_{\substack{l=1 \\ \tau_{lv}=0}}^{n} \sum\limits_{h=1}^{m} \left( c_{1ij}^{lh} \cdot \tilde{p}_{lh}^{(k)} \right) = b_{1j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{p}_{\nu j}^{(k)} - \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{p}_{\nu i}^{(k-1)} \cdot \sum\limits_{\substack{l=1 \\ \tau_{lv}=0}}^{n} \sum\limits_{h=1}^{m} \left( c_{\nu ij}^{lh} \cdot \tilde{p}_{lh}^{(k)} \right) = b_{\nu j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{p}_{mn}^{(k)} - \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{p}_{mi}^{(k-1)} \cdot \sum\limits_{\substack{l=1 \\ \tau_{lv}=0}}^{n} \sum\limits_{h=1}^{m} \left( c_{mij}^{lh} \cdot \tilde{p}_{lh}^{(k)} \right) = b_{mn} \end{cases} . \tag{15}$$

Решением системы (15) будут вероятности состояний элементов системы на $k$-м шаге, которые можно найти с помощью известных методов решения систем линейных уравнений. Согласно методу Крамера

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)} = \frac{\Delta}{\Delta_j}, \tag{16}$$

где $\Delta$ – главный определитель системы; $\Delta_j$ – определитель, полученный путем изменения $j$-го столбца столбцом свободных членов.

## Выводы

Таким образом, получена модель взаимодействия марковских процессов в распределенной системе, которая позволяет учитывать взаимодействие между элементами системы. Использование предложенной модели повышает точность расчета вероятностей состояний системы и увеличивает эффективность функционирования системы. Модель может широко использоваться для уточнения параметров телекоммуникационных сетей, веб-сайтов, других сложных объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зыков А. А. Основы теории графов. – М.: Наука ,1987. – 384с.
2. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр / Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
3. Новиков Д. А., Петраков С. Н. Курс теории активных систем. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 104 с.
4. H. S. Chang, M. C. Fu, J. Hu, and S. I. Marcus A Survey of Some Simulation-based Methods in Markov Decision Processes // Communications in Information and System, 2007. – №7. – P. 59 – 92.
5. Дубовой В. М., Ковалюк О. О. Стійкість процесу керування транспортною мережею міста // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця, 2006.–№6.–С. 106 – 111
6. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975. – 341с
7. Дубовой В. М., Ковалюк О. О. Оцінювання параметрів транспортних потоків міста // Вісник Хмельницького національного університету. – Хмельницький, 2005. – №4 .– С. 197 – 200

***Ковалюк Олег Александрович*** — аспирант кафедры компьютерных систем управления.
Винницкий национальный технический университет