

Н. Н. Беляев, д. т. н., проф.; Е. К. Нагорная

3D-РАСЧЕТ ВЕРТИКАЛЬНОГО ОТСТОЙНИКА НА БАЗЕ CFD-МОДЕЛИ

Рассмотрено построение численной модели массопереноса в вертикальном отстойнике. Моделирование осуществлялось на основе трехмерного уравнения переноса примеси и модели потенциального течения. Для численного интегрирования применялись неявные разностные схемы. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: численное моделирование, вертикальный отстойник, седиментация, вычислительный эксперимент, разностные схемы.

Введение

На сегодняшний день в мире активно развиваются теоретические методы расчета вертикальных отстойников. Это связано с тем, что проведение экспериментальных исследований в данной области требует много времени на постановку эксперимента, его проведение и обработку экспериментальных данных. Кроме этого, при проведении экспериментальных исследований используют дорогостоящую аппаратуру, причем измерение интересующих параметров происходит без «внедрения» прибора в поток [1] (например, система ADV – *Acoustic Doppler Velocity measurements* и т. п.), которую могут позволить себе не все лаборатории. В связи с этим физический эксперимент не может служить ежедневным инструментом для решения тех задач, которые возникают на этапе проектирования сооружений или их реконструкции. Для расчета данных сооружений применяют следующие группы моделей: балансовые модели [2, 3], регрессионные [4], одномерные кинематические модели переноса загрязнителя в сооружениях [5, 6, 7]. Эти модели экономичны и просты для практического применения. Однако серьезным недостатком перечисленных групп моделей является то, что *они не учитывают геометрическую форму* отстойника или другие его конструктивные особенности (например, перегородки внутри сооружения). Применение одномерных кинематических моделей для расчета отстойников, имеющих сложную геометрическую форму, – невозможно. Учет геометрической формы отстойника может быть осуществлен только при использовании 2D- или 3D-моделей. Применение многомерных моделей требует обязательного решения гидродинамической задачи по определению поля скорости потока внутри отстойника. За рубежом для решения гидродинамической задачи применяют, как правило, модель вязкой жидкости (уравнения Навье – Стокса). Реализация данной CFD-модели требует применения очень мелкой сетки, что является причиной значительных временных затрат на получение результата. Кроме этого, необходимо строгое обоснование применяемой модели турбулентности для расчета данного класса течений. Следует отметить, что расчет отстойника на базе специализированного кода, реализующего CFD-модель, стоит за рубежом, более 20 тысяч долларов [8]. В Украине многомерные CFD-модели для расчета вертикальных отстойников практически не разрабатывают. В связи с этим актуальной проблемой является разработка эффективных методов расчета вертикальных отстойников, основанных на применении CFD-моделей и позволяющих оперативно, с малыми финансовыми затратами рассчитывать данные сооружения, имеющие сложную геометрическую форму.

Целью данной работы является разработка 3D-CFD-модели массопереноса в вертикальном отстойнике, позволяющей учитывать при моделировании геометрическую форму отстойника. Отметим, что в работах [9, 10] представлена 2D-CFD-модель расчета

вертикального отстойника.

Математическая модель процесса массопереноса в вертикальном отстойнике

Процесс транспорта загрязнителя в вертикальном отстойнике рассчитывают на базе трехмерного уравнения переноса примеси [11]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_s)C}{\partial z} + \sigma C = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где C – концентрация загрязнителя в воде; u, v, w – компоненты вектора скорости течения; μ_x, μ_y, μ_z – коэффициенты диффузии; t – время; w_s – скорость оседания загрязнителя; σ – коэффициент, учитывающий процессы агломерации и т. п. в отстойнике.

Краевые условия для уравнения переноса

Стенки отстойника и различные непроницаемые объекты внутри него (труба, перегородки и т. п.) являются граничными линиями тока. В построенной численной модели на этих границах реализуется граничное условие вида

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0,$$

где n – единичный вектор внешней нормали к твердой поверхности.

На твердых горизонтальных поверхностях отстойника в численной модели реализуется граничное условие «поглощения» загрязнителя. На входной границе (граница входа потока сточных вод в отстойник) ставится условие:

$$C|_{\text{граница}} = C_E,$$

где C_E – известное значение концентрации загрязнителя.

На выходной границе расчетной области, в численной модели, ставится «циклическое» (мягкое) граничное условие вида

$$C(i+1, j, k) = C(i, j, k),$$

где i, j, k – номер разностной ячейки у распространения загрязнителя в отстойнике решают на установление решения.

Модель гидродинамики

Решение уравнения переноса загрязнителя внутри отстойника (1) возможно, если известно поле скорости потока в вертикальном отстойнике. Поэтому для расчета транспорта загрязнителя в отстойнике необходимо решить гидродинамическую задачу и определить это поле скорости. Для решения данной гидродинамической задачи используют 3D-модель потенциального течения. В этом случае моделирующее уравнение имеет вид [12]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

где P – потенциал скорости.

Для уравнения (2) ставят следующие граничные условия [12]:

– на твердых стенках отстойника, перегородках внутри него: $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$, где n – единичный вектор внешней нормали к твердой границе;

– на входной границе (область втекания сточных вод в отстойник): $\frac{\partial P}{\partial n} = V_n$, где V_n –

известное значение скорости втекания;

– на выходной границе расчетной области (область выхода осветленных вод из отстойника) $P = P^*(x = const, y) + const$ (условие Дирихле).

После расчета поля потенциала скорости выполняют расчет компонент вектора скорости потока сточных вод на основе зависимостей [5]

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Численный метод решения уравнения переноса загрязнителя

Для численного интегрирования уравнения переноса загрязнителя в отстойнике применяют попеременно треугольную разностную схему расщепления [13, 14]. Численный расчет реализуют на прямоугольной разностной сетке. Значение концентрации загрязнителя рассчитывают в центрах разностных ячеек. Рассмотрим построение данной разностной схемы для уравнения переноса.

Заменим производную по времени разделенной разностью «назад»:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t}.$$

Конвективные производные представим в виде:

$$\frac{\partial u C}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C}{\partial x} + \frac{\partial u^- C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v C}{\partial y} = \frac{\partial v^+ C}{\partial y} + \frac{\partial v^- C}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w C}{\partial z} = \frac{\partial w^+ C}{\partial z} + \frac{\partial w^- C}{\partial z},$$

$$\text{где } u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{u - |u|}{2}; \quad v^+ = \frac{v + |v|}{2}; \quad v^- = \frac{v - |v|}{2}; \quad w^+ = \frac{w + |w|}{2}; \quad w^- = \frac{w - |w|}{2}.$$

Выполним аппроксимацию конвективных производных разделенными разностями «против потока»:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^+ C}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j,k}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^+ C_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C^{n+1}, \\ \frac{\partial u^- C}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j,k}^- C_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^- C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C^{n+1}, \\ \frac{\partial v^+ C}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1,k}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^+ C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C^{n+1}, \\ \frac{\partial v^- C}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1,k}^- C_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^- C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C^{n+1}, \\ \frac{\partial w^+ C}{\partial z} &\approx \frac{w_{i,j,k+1}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^+ C_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} = L_z^+ C^{n+1}, \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial w^- C}{\partial z} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^- C_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}^- C_{i,j,k}}{\Delta z} = L_z^- C^{n+1}.$$

Вторые производные аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) &\approx \tilde{\mu}_x \frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} - \tilde{\mu}_x \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- C^{n+1} + M_{xx}^+ C^{n+1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) &\approx \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} - \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1}. \end{aligned}$$

В использованных выражениях L_x^+ , L_x^- , M_{xx}^+ , M_{xx}^- и т. д. – обозначения разностных операторов. С учетом этих обозначений разностный аналог уравнения переноса примеси будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} + L_x^+ C^{n+1} + L_x^- C^{n+1} + L_y^+ C^{n+1} + L_y^- C^{n+1} + L_z^+ C^{n+1} + L_z^- C^{n+1} + \sigma C_{i,j,k}^{n+1} = \\ = (M_{xx}^+ C^{n+1} + M_{xx}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1} + M_{yy}^- C^{n+1} + M_{zz}^+ C^{n+1} + M_{zz}^- C^{n+1}) \end{aligned}$$

Расщепим решение данного разностного уравнения при интегрировании на временном интервале ∂t следующим образом:

на первом шаге $k = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j}^{n+k} - C_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C^k + L_y^+ C^k + L_z^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{i,j,k}^k = \\ = \frac{1}{4} (M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^k + M_{yy}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{zz}^+ C^k + M_{zz}^- C^k), \end{aligned} \quad (3)$$

на втором шаге $k = n + \frac{1}{2}$; $c = n + \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^k - C_{i,j,k}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C^k + L_y^- C^k + L_z^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{i,j}^k = \\ = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c + M_{zz}^- C^k + M_{zz}^+ C^c), \end{aligned} \quad (4)$$

на третьем шаге $k = n + \frac{3}{4}$; $c = n + \frac{1}{2}$ используют формулу (4);

на четвертом шаге $k = n + 1$; $c = n + \frac{3}{4}$ используют формулу (3).

В приведенных обозначениях принято $w = w - w_s$.

Неизвестное значение концентрации загрязнителя на каждом шаге расщепления определяют по явной формуле «бегущего счета».

Численное интегрирование уравнения для потенциала скорости

Для численного интегрирования уравнения (2) используется метод Либмана [15]. В этом случае аппроксимирующее уравнение имеет вид:

$$\frac{P_{i+1,j,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = 0.$$

На основе данной зависимости получаем формулу для определения значения потенциала

скорости в центре разностной ячейки

$$P_{i,j,k} = \left[\frac{P_{i+1,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right] / A ,$$

где $A = \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right)$.

Расчитанное поле потенциала скорости используют для определения компонент вектора скорости на гранях контрольных объемов (разностных ячеек) по формулам:

$$u_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x} ,$$

$$v_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y} ,$$

$$w_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z} .$$

Расчет компонент вектора скорости потока на гранях разностных ячеек, позволяет построить консервативную разностную схему для уравнения переноса загрязнителя внутри отстойника.

Численный расчет поля скорости и процесса транспорта загрязнителя в вертикальных отстойниках проводят в области сложной геометрической формы. Формирование геометрической формы отстойника на прямоугольной разностной сетке осуществляют с помощью метода маркирования [13]. Такой подход дает возможность пользователю быстро формировать любую геометрическую форму отстойника, без каких-либо налагаемых на нее ограничений.

Практическая реализация модели

На основе построенной CFD-модели разработан специализированный код «Settler-3D». Для программирования использовался *FORTRAN*.

Построенная численная модель использовалась для моделирования процесса массопереноса в вертикальном отстойнике с перегородкой (рис. 1) [2]. Цель вычислительного эксперимента – оценка эффективности очистки воды в отстойнике рассматриваемого типа при различной скорости оседания загрязнителя w_s и при различном размещении перегородки внутри отстойника.

Вычислительный эксперимент проводился при таких параметрах: длина отстойника – 6 м; ширина – 5 м; глубина – 3,34 м; скорость потока на входе в отстойник 12 м/ч; коэффициент диффузии по всем координатным направлениям – 0,7 м²/ч; $w_s = 1,6$ м/ч и $w_s = 0,5$ м/ч; $k = 0$. Концентрация загрязнителя во входящем в отстойник потоке равна 100 ед. (в безразмерном виде). Длина перегородки – 1,66 м.

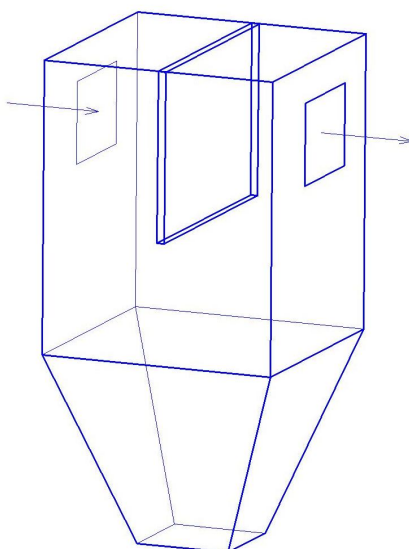
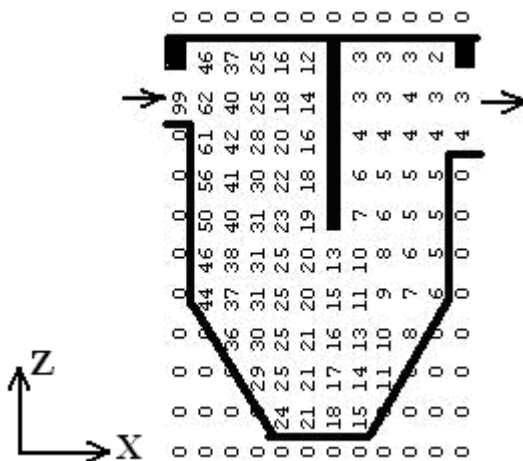


Рис. 1. Схема вертикального отстойника с перегородкой

Рассмотрим результаты вычислительного эксперимента. На рис. 2 представлено распределение значения концентрации загрязнителя в отстойнике (вид сбоку) в сечении $y=2,25$ м, $w_s=1,2$ м/ч. В данном варианте задачи перегородка размещается посередине отстойника. На данном рисунке показано, где происходит вход и выход воды из отстойника. Для сравнения на рис. 3 представлено распределение концентрации загрязнителя в этом же сечении отстойника, но при скорости оседания загрязнителя $w_s=0,5$ м/ч. Видно, что при значении параметра $w_s=1,2$ м/ч распределение концентрации загрязнителя по высоте отстойника существенно неравномерно: основная масса загрязнителя «сконцентрирована» в нисходящей части отстойника, а в восходящем потоке концентрация загрязнителя значительно меньше (зона загрязнения в этой части отстойника как бы «разрежена»).


 Рис. 2. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с перегородкой (вид сбоку, сечение $y=2,25$ м, $w_s=1,2$ м/ч, $C_{\max}=100$)

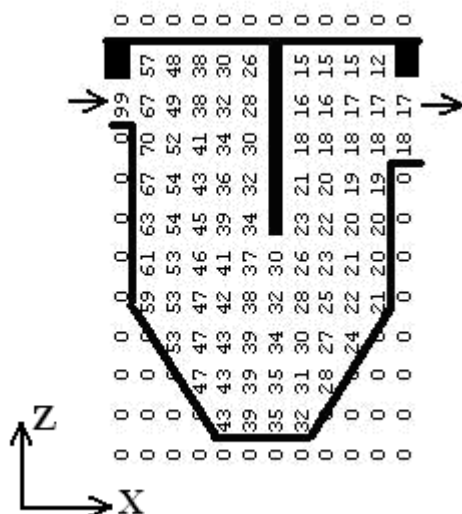


Рис. 3. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с перегородкой (вид сбоку, сечение $y=2,25$ м, $w_s=0,5$ м/ч, $C_{\max}=100$)

При значении $w_s=0,5$ м/ч распределение концентрации загрязнителя в данном сечении – другое, более равномерное, что явно свидетельствует о том, что процесс очистки воды происходит менее эффективно. На последующих рисунках (рис. 4, 5) показано распределение концентрации загрязнителя в различных сечениях отстойника при величине параметра $w_s=1,2$ м/ч. Эти данные позволяют оценить эффективность очистки в различных частях отстойника. На рис. 6 представлено распределение концентрации загрязнителя в отстойнике для варианта, когда перегородка смещена ближе к выходному отверстию сооружения.

Следует подчеркнуть, что на приведенных рисунках значение концентрации представлено в безразмерном виде: каждое число – это величина концентрации в процентах от величины максимальной концентрации в данном сечении. Поэтому под каждым рисунком дана информация о величине этой максимальной концентрации для данного сечения. Такое представление результатов вычислительного эксперимента позволяет быстро анализировать информацию по оценке величины концентрации в любой части отстойника. Следует отметить, что вывод на печать результатов расчета осуществляют по формату печати «целых» чисел, т. е. дробную часть числа не выдают на печать. Это значит, если, например, в какой-то точке расчетное значение концентрации составляет «1,85 %» от концентрации на входе в отстойник, то на печать будет выведено число «1». Аналогично, если значение концентрации менее 1 %, то на печать выдается «0». Данный подход к такому выводу результатов на «печать» эффективен при проведении серийных расчетов, когда осуществляется «перебор» различных вариантов с целью выбора наиболее оптимальной конструкции сооружения. Для детального анализа данных расчета разработанный код выдает значение концентрации по формату «действительных» чисел, т. е. с сохранением величины дробной части числа.

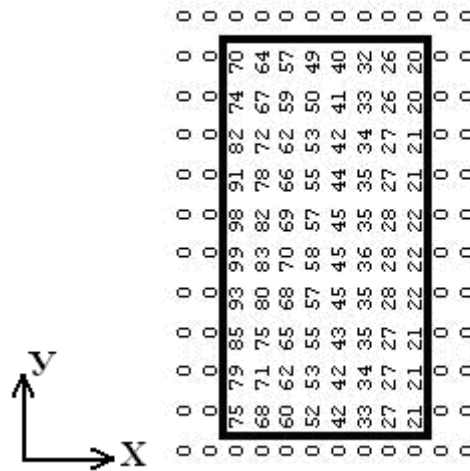


Рис. 4. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с перегородкой (вид сверху, сечение $z=0,82$ м, $w_s=1,2$ м/ч, $C_{\max}=0,3$)

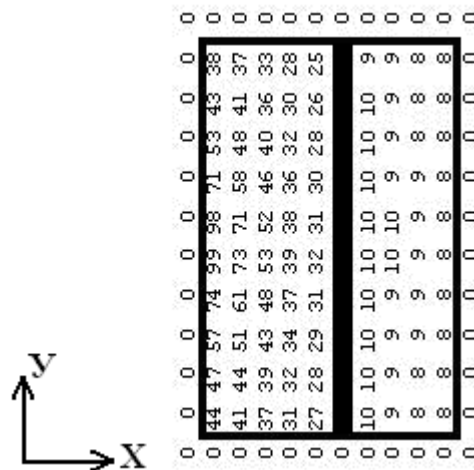


Рис. 5. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с перегородкой (вид сверху, сечение $z=2,14$ м, $w_s=1,2$ м/ч, $C_{\max}=0,52$)

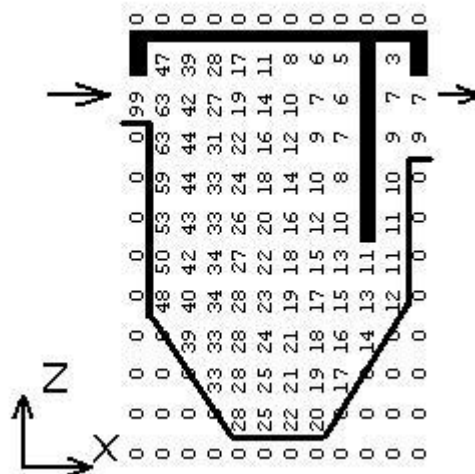


Рис. 6. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с перегородкой, смещенной к выходному отверстию (вид сбоку, сечение $y=2,25$ м, $w_s=1,2$ м/ч, $C_{\max}=100$)

На основе проведенного вычислительного эксперимента определена эффективность работы отстойника. Так, величина концентрации загрязнителя на выходе из отстойника (т. е. эффективность очистки), при значении параметра $w_s=1,2$ м/ч, составляет: $C_e=2$ % от величины концентрации загрязнителя на входе в отстойник, а при значении $w_s=0,5$ м/ч, концентрация загрязнителя на выходе из отстойника составляет $C_e=13-15$ %. Таким образом, уменьшение скорости оседания загрязнителя примерно в 2,4 раза привело к существенному ухудшению (примерно в 7 раз) степени очистки воды в отстойнике. Для отстойника со смещенной к выходному отверстию перегородкой ($w_s=1,2$ м/ч), концентрация загрязнителя на выходе из отстойника составляет $C_e=3$ %.

В заключение отметим, что для расчета одного варианта задачи потребовалось около 2 минут компьютерного времени. Такие минимальные затраты времени на проведение вычислительного эксперимента являются важным условием при проведении серийных расчетов на практике.

Выводы

В работе представлена эффективная 3D-численная модель для исследования процесса массопереноса в вертикальных отстойниках сложной геометрической формы. Созданный специализированный код может быть использован как инструмент решения комплекса прикладных задач, возникающих при проектировании и реконструкции вертикальных отстойников. Особенностью построенной численной модели является возможность оперативного расчета сооружений в трехмерном пространстве. Дальнейшее развитие данной работы следует проводить в направлении разработки модели процесса массопереноса в отстойниках на базе модели отрывных вихревых течений идеальной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vanrolleghem P. A. New measurement techniques for secondary settlers: a review / P. A. Vanrolleghem, B. D. Clercq, J. D. Clercq, M. Devisscher, D. J. Kinnear, I. Nopens // *Water Science & Technology*, 2006. – Vol 53, No 4 – 5. – P. 419 – 429.
2. Таварткиладзе И. М. Математическая модель расчета вертикальных отстойников с перегородкой / И. М. Таварткиладзе, А. М. Кравчук, О. М. Нечипор // *Водоснабжение и санитарная техника*. – Вып. № 1. – 2006. – Ч. 2. – С. 39 – 42.
3. Stamou A. I. Validation and application of a simple model for circular secondary settling tanks / A. I. Stamou, D. L. Giokas, Y. Kim, P. A. Paraskevas // *Global NEST Journal*. – Greece, 2008. – Vol 10, No 1. – P. 62 – 72.
4. Токарь И. Я. К расчету вертикальных отстойников водоочистных сооружений / И. Я. Токарь, Г. И. Сухоруков, Д. Г. Сухоруков // *Науковий вісник будівництва*. – № 59. – 2010. – С. 293 – 296.
5. Олейник А. Я. Теоретический анализ процессов осаждения в системах биологической очистки сточных вод / А. Я. Олейник, Ю. И. Калугин, Н. Г. Степовая, С. М. Зябликов // *Прикладная гидромеханика*. – Том 6 (78). – № 4. – 2004. – С. 62 – 67.
6. Степова Н. Г. До розрахунку вертикального відстійника з урахуванням форми його нижньої частини / Н. Г. Степова, Ю. І. Калугін, О. Я. Олійник // *Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравлики*. – Вип. № 14. – 2010. – С. 145 – 151.
7. Stamou A. I. A 1-D model for secondary circular clarifiers / A. I. Stamou // *Proc. of the Intern. Conference for the Restoration and Protection of the Environment V, Mykonos, Greece*, 2004. – P. 8
8. Shaw A. Optimizing Energy Dissipating Inlet (Edi) Design In Clarifiers Using An Innovative CFD Tool / A. Shaw, S. McGuffie, C. Wallis-Lage, J. Barnard // *WEFTEC*, 2005. – P. 8719 – 8736.
9. Беляев Н. Н. Математическое моделирование работы канализационного отстойника / Н. Н. Беляев, Е. К. Нагорная // *Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: 72 міжн. наук.-практ. конф., 19–20 квітня 2012 р.: тези доп.* – Дніпропетровськ, 2012. – С. 209 – 210.
10. Беляев Н. Н. Численная модель работы вертикального отстойника / Н. Н. Беляев, Е. К. Нагорная // *Современные информационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: межд. научн.-практ. конф., 5–6 квітня 2012 р.: тезисы докл.* – Днепропетровск, 2012. – С. 56.
11. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 735 с.
13. Згуровский М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
14. Беляев Н. Н. Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод. / Н. Н. Беляев, Е. Д. Коренюк, В. К. Хрущ. – Днепропетровск: Наука и образование, 2001. – 156 с.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

Беляев Николай Николаевич – д. т. н., профессор, завкафедрой гидравлики и водоснабжения.
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна.

Нагорная Елена Константиновна – ассистент кафедры гидравлики.
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры.