УДК 517.2

А. Б. Мокин, д. т. н., проф.; В. Б. Мокин, д. т. н., проф.;
Б. И. Мокин, акад. НАПН Украины, д. т. н., проф.

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО АРСС(P,Q) С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОРЯДКОВ P, Q, КОТОРЫЙ ОБОБЩАЕТ МЕТОДИКУ ЮЛА – УОКЕРА

Предложен метод идентификации модели авторегрессии-скользящего среднего АРСС(p,q) с произвольными значениями порядков p, q, который методику Юла – Уокера, разработанную для идентификации модели авторегрессии АР(p), обобщает на случай, когда авторегрессионная составляющая модели АР(p) дополняется составляющей скользящего среднего СС(q). Алгоритм предложенного метода содержит в себе как систему линейных уравнений типа Юла – Уокера для определения p параметров авторегрессии, так и дополнительные нелинейные уравнения для идентификации q параметров скользящего среднего. Работу алгоритма продемонстрировано на примере p = 3, q = 3.

Ключевые слова: *временные ряды, модель авторегрессии-скользящего среднего, методика Юла – Уокера, нелинейное дополнение методики Юла – Уокера.*

Постановка задачи и исходные предпосылки

Как известно [1, 2], идентифицировать модель АР(p), которая имеет вид

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t, \tag{1}$$

где z_t – центрированное значение временного ряда в момент времени t, a_t – импульс белого шума с дисперсией σ_a^2, сгенерированный в тот же момент времени t, можно, применяя методику Юла – Уокера, в соответствии с которой численные значения коэффициентов регресии, φ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ определяют из матричного уравнения

$$\varphi = M^{-1}\rho, \tag{2}$$

в котором матрица M^{-1} является обратной к матрице M, а матрицы φ, M, ρ имеют вид:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \ldots \\ \varphi_p \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1\ \rho_1\ \rho_2\ \rho_3 \cdots \rho_{p-1} \\ \rho_1\ 1\ \rho_1\ \rho_2 \cdots \rho_{p-2} \\ \rho_2\ \rho_1\ 1\ \rho_1 \cdots \rho_{p-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{p-1}\rho_{p-2}\rho_{p-3}\cdots 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \ldots \\ \rho_p \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Напомним, что в матрицах (3) ρ_i, $i=1, 2, \ldots, p$ – это автокорреляции центрированного временного ряда z_t, определяемые из выражения

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0},\ i = 1,2,\ldots,p, \tag{4}$$

в котором γ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ – автоковариации, определяемые для центрированного временного ряда z_t по выражению

$$\gamma_i = \frac{1}{N-i}\sum_{t=1}^{N-i} z_t z_{t+i}\,,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p \tag{5}$$

и используемые, кроме решения матричного уравнения (2), также и для определения дисперсии σ_a^2 белого шума a_t по выражению

$$\sigma_a^2 = \gamma_0 - \varphi_1\gamma_1 - \varphi_2\gamma_2 - \ldots - \varphi_p\gamma_p\,, \tag{6}$$

в которое также подставляют результаты решения матричного уравнения (2).

Выражения (1) – (6) задают исходные предпосылки для поставленной нами задачи создания метода идентификации модели авторегрессии-скользящего среднего АРСС*(p,q*) с произвольными значениями порядков *p, q*, структура которой для центрированного временного ряда z_t имеет вид

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}\,, \tag{7}$$

путем дальнейшего развития методики Юла – Уокера.

К этим шести предпосылкам необходимо добавить еще одну – седьмую предпосылку, которая обусловлена отсутствием корреляции между соседними импульсами белого шума и может быть задана известными выражениями [1, 2]:

$$\operatorname{cov}(z_t a_{t-i}) = \begin{cases} \sigma_a^2,\ \text{для}\ (i = 0), \\ 0,\ \text{для}\ (i \neq 0). \end{cases} \tag{8}$$

$$\operatorname{cov}(z_{t-k} a_{t-i}) = \begin{cases} \sigma_a^2,\ \text{для}\ (i = k), \\ 0,\ \text{для}\ (i \neq k). \end{cases} \tag{9}$$

Завершая вступление, чтобы подчеркнуть нетривиальность предложенного нами метода идентификации модели АРСС (*p,q*) при произвольных значениях порядков *p, q* приведем цитату со страницы 97 монографии Бокса и Дженкинса [3]: «Как в случае фиксированного σ_a^2, так и в случае фиксированного σ_γ^2 (равного по определению γ_0 – авторская ремарка) оптимальный выбор приводит к некоторым случайным процессам, параметры которых являются функциями неизвестных динамических параметров. Поэтому мы оказываемся в хорошо известной парадоксальной ситуации, когда можно собрать лучшие данные только при условии, что уже что-то известно об искомом ответе. Последовательный поход, при котором мы улучшаем режим по мере получения новых сведений о параметрах, открывает возможности, заслуживающие дальнейшего изучения».

Решение поставленной задачи

На первом этапе создания метода идентификации модели АРСС(*p,q*) и его алгоритма в модели (7) конкретизируем значения параметров на таком уровне, на котором уже можно будет делать обобщения, но которые еще не приводят к слишком громоздким математическим выражениям. Очевидно, если задать $p = 1$, $q = 1$ или $p = 2$, $q = 2$, что характерно для работы [1], то полученной информации для обобщения будет недостаточно, поэтому пусть будет $p = 3$ и $q = 3$. Тогда из выражения (7) для АРСС(3,3) будем иметь:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varphi_3 z_{t-3} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3}\,. \tag{10}$$

Домножая обе части уравнения (10) по очереди на $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, z_{t-4}, z_{t-5}, z_{t-6}$, усредняя полученные произведения с использованием выражения для автоковариации (5) и учитывая условия (8), (9), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\gamma_0=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_2+\varphi_3\gamma_3+\sigma_a^2-\theta_1(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2-\theta_2(\varphi_2-\theta_2)\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_3-\theta_3)\sigma_a^2,\\ \gamma_1=\varphi_1\gamma_0+\varphi_2\gamma_1+\varphi_3\gamma_2-\theta_1\sigma_a^2-\theta_2(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_2-\theta_2)\sigma_a^2,\\ \gamma_2=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_0+\varphi_3\gamma_1-\theta_2\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2,\\ \gamma_3=\varphi_1\gamma_2+\varphi_2\gamma_1+\varphi_3\gamma_0-\theta_3\sigma_a^2,\\ \gamma_4=\varphi_1\gamma_3+\varphi_2\gamma_2+\varphi_3\gamma_1,\\ \gamma_5=\varphi_1\gamma_4+\varphi_2\gamma_3+\varphi_3\gamma_2,\\ \gamma_6=\varphi_1\gamma_5+\varphi_2\gamma_4+\varphi_3\gamma_3.\end{cases} \tag{11}$$

Анализируя полученную систему уравнений (11), видим, что из первых четырех уравнений, применяя к ним методику Юла – Уокера, легко можно найти все три параметра авторегресии. Очевидно, что в этом случае матрицы, которые используются в методике Юла – Уокера, будут иметь вид:

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},\quad M_\gamma=\begin{bmatrix}\gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1\\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3\end{bmatrix},\quad \gamma=\begin{bmatrix}\gamma_4\\ \gamma_5\\ \gamma_6\end{bmatrix}, \tag{12}$$

а аналогом матричного решения (2) будет матричное выражение

$$\varphi=M_\gamma^{-1}\gamma\,, \tag{13}$$

в котором M_γ^{-1} – матрица, обратная к матрице M_γ, заданной выражением (12).

А дальше поступим следующим образом. Для каждого из первых четырех уравнений системы (11) найдем численные значения алгебраической суммы составляющих, обозначим их A, B, C, D, используя такие выражения:

$$\gamma_0-\varphi_1\gamma_1-\varphi_2\gamma_2-\varphi_3\gamma_3=A, \tag{14}$$

$$\gamma_1-\varphi_1\gamma_0-\varphi_2\gamma_1-\varphi_3\gamma_2=B, \tag{15}$$

$$\gamma_2-\varphi_1\gamma_1-\varphi_2\gamma_0-\varphi_3\gamma_1=C, \tag{16}$$

$$\gamma_3-\varphi_1\gamma_2-\varphi_2\gamma_1-\varphi_3\gamma_0=D\,. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в четвертое уравнение системы (11), найдем, что

$$\sigma_a^2=-\frac{D}{\theta_3}, \tag{18}$$

а подставляя выражения (14) – (16) и выражение (18) в первые три уравнения системы (11), получим новую систему уравнений в виде:

$$\begin{cases}A\theta_3=D(-1+\theta_1(\varphi_1-\theta_1)+\theta_2(\varphi_2-\theta_2)+\theta_3(\varphi_3-\theta_3)),\\ B\theta_3=D(\theta_1+\theta_2(\varphi_1-\theta_1)+\theta_3(\varphi_2-\theta_2)),\\ C\theta_3=D(\theta_2+\theta_3(\varphi_1-\theta_1)),\end{cases} \tag{19}$$

из третьего уравнения которой найдем, что

$$\theta_3=\frac{D\theta_2}{C-D(\varphi_1-\theta_1)}. \tag{20}$$

Подставляя выражение (20) в первые два уравнения системы (19) и упрощая, получим новую систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1, θ_2, имеющую вид:

$$\begin{cases} f_1(\theta_1, \theta_2) = 0, \\ f_2(\theta_1, \theta_2) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

в которой:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_1, \theta_2) = A\theta_2(C - D(\varphi_1 - \theta_1)) - (C - D(\varphi_1 - \theta_1))^2(-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1) + \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)) - \\ - D\theta_2(\varphi_3(C - D(\varphi_1 - \theta_1)) - D\theta_2), \end{aligned} \tag{22}$$

$$f_2(\theta_1, \theta_2) = B\theta_2 - (C - D(\varphi_1 - \theta_1))(\theta_1 + \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)) - D\theta_2(\varphi_2 - \theta_2). \tag{23}$$

Таким образом, вторым этапом предложенного метода идентификации будет определение численных значений θ_1^*, θ_2^* параметров θ_1, θ_2 скользящего среднего модели.

В связи с тем, что уравнения, которые входят в систему (21), являются нелинейными, для решения этой системы нелинейных уравнений применим один из методов последовательных приближений. Если, например, для решения этой системы мы применим метод Ньютона [4], то, зная *n-приближение* параметров θ_1, θ_2, их (*n+1*)-приближение, найдем при помощи рекуррентных соотношений:

$$\theta_{1(n+1)} = \theta_{1(n)} + \frac{\Delta f_{\theta_2(n)}}{\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)}}, \quad \theta_{2(n+1)} = \theta_{2(n)} + \frac{\Delta f_{\theta_1(n)}}{\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{24}$$

в которых:

$$\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}\theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

$$\Delta f_{\theta_2(n)} = \begin{vmatrix} - f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) & \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \\ - f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) & \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}\theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \end{vmatrix}, \Delta f_{\theta_1(n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & - f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\ \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & - f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Итерационный процесс останавливаем после того, как относительная погрешность очередного приближения станет меньше ее заданного априори значения δ, т.е. когда

$$\left| \frac{\theta_{1(n+1)} - \theta_{1(n)}}{\theta_{1(n)}} \right| \le \delta, \qquad \left| \frac{\theta_{2(n+1)} - \theta_{2(n)}}{\theta_{2(n)}} \right| \le \delta. \tag{27}$$

Те численные значения параметров θ_1, θ_2, которые удовлетворяют неравенство (27), и принимаем за действительные значения этих параметров, найденные в результате решения задачи идентификации. Т.е. принимаем, что

$$\theta_1^* = \theta_{1(n)}, \quad \theta_2^* = \theta_{2(n)}. \tag{28}$$

А на заключительном третьем этапе решения поставленной задачи идентификации необходимо выполнить только два действия, а именно – сначала подстановкой выражений (28) в соотношение (20) необходимо определить численное значение θ_3^* третьего неизвестного параметра модели АРСС(3,3), а затем подстановкой этого уже найденного значения третьего параметра в выражение (18) определить численное значение дисперсии

σ_a^2 белого шума a_t, импульсы которого, сгенерированные стандартной компьютерной программой при заданном значении дисперсии, необходимо «подмешивать» во временной ряд (10) так, как того требует структура этой модели.

Легко заметить, что для получения расчетных выражений предложенного метода для значений порядков *p* и *q*, меньших трех, необходимо в синтезированных нами выражениях приравнять нулю те параметры, которых выбранная нами более простая модель АРСС(*p,q*) в своей структуре не имеет. Например, если *p* = 3, *q* = 2, то вместо системы уравнений (11) будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_0 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \varphi_3\gamma_3 + \sigma_a^2 - \theta_1(\varphi_1 - \theta_1)\sigma_a^2 - \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)\sigma_a^2, \\ \gamma_1 = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 + \varphi_3\gamma_2 - \theta_1\sigma_a^2 - \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)\sigma_a^2, \\ \gamma_2 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 + \varphi_3\gamma_1 - \theta_2\sigma_a^2, \\ \gamma_3 = \varphi_1\gamma_2 + \varphi_2\gamma_1 + \varphi_3\gamma_0, \\ \gamma_4 = \varphi_1\gamma_3 + \varphi_2\gamma_2 + \varphi_3\gamma_1, \\ \gamma_5 = \varphi_1\gamma_4 + \varphi_2\gamma_3 + \varphi_3\gamma_2, \end{cases} \tag{29}$$

а вместо матриц M_γ, γ в виде (12) будем иметь их в виде:

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Вместо выражения (18) будем иметь

$$\sigma_a^2 = -\frac{C}{\theta_2}, \tag{31}$$

а вместо системы уравнений (19) будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} A\theta_2 = C(-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1) + \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)), \\ B\theta_2 = C(\theta_1 + \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)), \end{cases} \tag{32}$$

со второго уравнения которой вместо выражения (20) будем иметь

$$\theta_2 = \frac{C\theta_1}{B - C(\varphi_1 - \theta_1)}. \tag{33}$$

Вместо системы нелинейных уравнений (21) будем иметь только одно нелинейное уравнение

$$f_1(\theta_1) = 0, \tag{34}$$

в котором

$$\begin{gathered} f_1(\theta_1) = A\theta_1(B - C(\varphi_1 - \theta_1)) - (-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1))(B - C(\varphi_1 - \theta_1))^2 - \\ \theta_1(\varphi_2(B - C(\varphi_1 - \theta_1)) - C\theta_1). \end{gathered} \tag{35}$$

В этом случае вместо процедуры, заданной выражениями (24) – (26), решение уравнения (34) будем искать, используя выражение

$$\theta_{1(n+1)} = \theta_{1(n)} - \frac{f_1(\theta_{1(n)})}{\dfrac{df_1(\theta_{1(n)})}{d\theta_1}}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{36}$$

Обобщение предложенного метода на модели АРСС(*p,q*) при значениях порядков *p, q*, больших трех, и алгоритм оптимизации структуры модели будут изложены нами в следующей статье. А в заключение этой статьи предлагаем обратить внимание на то, что, в отличие от алгоритма идентификации модели АРСС(p,q) по методике, изложенной в работе [1], в которой и параметры регрессии и параметры скользящего среднего предлагают определять, используя одни и те же значения автоковариаций и применяя процедуру минимизации суммы квадратов отклонений для поиска оценок параметров скользящего среднего при определенных ранее на этих же значениях автоковариаций с использованием методики Юла – Уокера параметрах авторегрессии, в нашем методе, во-первых, параметры авторегрессии рассчитывают с использованием одного набора автоковариаций, а параметры скользящего среднего рассчитывают с использованием другого набора автоковариаций, что соответствует кибернетическому принципу использования «свежих точек» при расширении набора параметров, оценки которых ищут, а во-вторых, для определения параметров скользящего среднего используют прямую процедуру, которая не требует возобновления процедуры минимизации суммы квадратов отклонений при переходе к другим значениям порядков авторегрессии и скользящего среднего.

Выводы

1. Предложен метод идентификации модели авторегрессии-скользящего среднего АРСС(p,q) с произвольными значениями порядков p, q, который методику Юла – Уокера, разработанную для идентификации модели авторегрессии АР(p), обобщает на случай, когда авторегрессионная составляющая модели АР(p) дополняется составляющей скользящего среднего СС(q).

2. Для реализации алгоритма предложенного метода необходимо на первом этапе решать систему линейных уравнений типа Юла – Уокера для определения p параметров авторегрессии с использованием одного набора автоковариаций, на втором этапе решать систему дополнительных нелинейных уравнений для идентификации q-1 параметров скользящего среднего с использованием другого набора автоковариаций, а на третьем этапе осуществлять формульное доопределение последнего параметра скользящего среднего и доопределять значение дисперсии белого шума, который необходимо «подмешивать» к модели АРСС(p,q) для обеспечения ее адекватности реальному временному ряду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. — 408 с.

2. . Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 2 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 197 с.

3. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 260 с.

4. Численные методы / [Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., и др.]. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.

Мокин Александр Борисович – д. т. н., профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокин Виталий Борисович – д. т. н., профессор, заведующий кафедрой компьютерного эколого-экономического мониторинга и инженерной графики, e-mail: vbmokin@gmail.com.

Мокин Борис Иванович – академик Национальной АПН Украины, д. т. н., проф., профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов.

Винницкий национальный технический университет.