

УДК 517.977

**А. Б. Мокин, д. т. н., проф.; В. Б. Мокин, д. т. н., проф.;**  
**Б. И. Мокин, акад. НАПН Украины, д. т. н., проф.; И. А. Чернова**

**МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ В МНОГОМЕРНЫХ  
 ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ,  
 МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ НЕ ВЫШЕ ТРЕТЬЕГО  
 ПОРЯДКА, ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ПО ЧАСТОТЕ СРЕЗА**

*Предложен метод идентификации процессов в многомерных динамических объектах, допускающих линеаризацию и работающих в режиме прямой передачи сигнала, математическими моделями не выше третьего порядка, эквивалентными по частоте среза. Алгоритм метода базируется на системе уравнений, одна часть которых синтезируется с учетом предельных условий, задающихся частотой среза, а другая часть синтезируется по стандартной процедуре метода наименьших квадратов по логарифмическим частотным характеристикам.*

**Ключевые слова:** динамическая система, математическая модель, частота среза, дифференциальное уравнение, эквивалентирование, метод наименьших квадратов.

**Постановка задачи и исходные предпосылки**

В работе [1] определены условия, при которых процессы в динамических объектах, допускающих линеаризацию и описываемых дифференциальными уравнениями высоких порядков, то есть дифференциальными уравнениями, имеющими вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \quad n > 3, \quad (1)$$

в диапазоне изменения координат движения можно эквивалентно (без внесения существенных погрешностей) описывать дифференциальными уравнениями с порядком, не выше третьего, то есть дифференциальными уравнениями, которые имеют вид

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x, \quad (2)$$

или вид

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_2 x, \quad (3)$$

или даже вид

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 x. \quad (4)$$

Эти условия сводятся к тому, что лишь для тех динамических объектов, при подаче на вход которых единичного входного сигнала

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5)$$

для их реакции  $y(t)$  являются справедливыми выражения:

$$y'(0) \neq 0, \quad (6)$$

$$y''(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (7)$$

в качестве эквивалентной модели можно использовать дифференциальные уравнения вида (4).

Если же для реакции  $y(t)$  динамического объекта являются справедливыми выражения:

$$y'(0) = 0 \tag{8}$$

$$y''(t_n) = 0, \quad t_n \in [0, \infty), \tag{9}$$

то в качестве эквивалентной модели можно использовать дифференциальные уравнения вида (3). А если для реакции  $y(t)$  динамического объекта являются справедливыми выражения (6) и (9), то в качестве эквивалентной модели можно использовать дифференциальные уравнения вида (2).

В той же работе [1] показано, что для синтеза эквивалентных моделей многомерных динамических объектов в классах уравнений (2) – (4) условия (6) – (9) является необходимыми, но не достаточными, и определено достаточные условия эквивалентирования динамических объектов с использованием их логарифмических частотных характеристик — амплитудной (ЛАЧХ)  $L(\omega)$  и фазовой (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)$  [2], которые для динамического объекта, движение которого в общем виде описывается дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка (1), ориентировочно можно представить так, как показано на рис. 1.

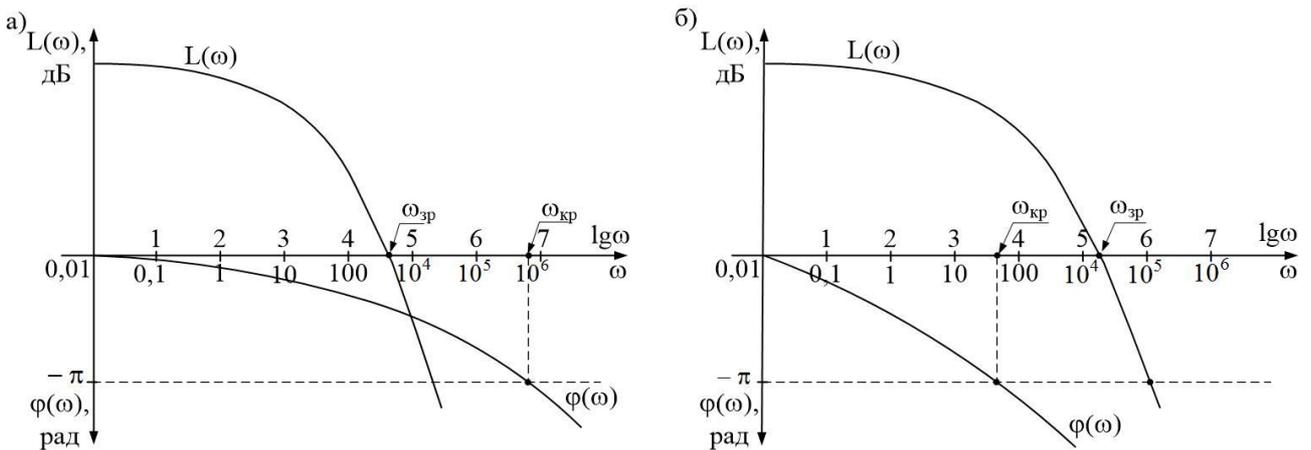


Рис. 1. Ориентировочные графики ЛАЧХ и ЛФЧХ динамического объекта  $n$ -го порядка

Напомним о том, что, превращая дифференциальные уравнения (1) – (4) по Лапласу [2], можем перейти к их эквивалентам на комплексной плоскости — передаточным функциям — в виде:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \tag{10}$$

$$W_1(p) = \frac{K_1}{a_1 p + 1}, \tag{11}$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \tag{12}$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \tag{13}$$

для которых справедливо:

$$W_i(j\omega) = W_i(p) \Big|_{p=j\omega} = R_i(\omega) + jQ_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

$$A_i(\omega) = \sqrt{R_i^2(\omega) + Q_i^2(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_i(\omega)}{R_i(\omega)}, \quad (15)$$

$$L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega). \quad (16)$$

Напомним также о том, что в выражениях (16) для ЛАЧХ и ЛФЧХ увеличения круговой частоты  $\omega$  откладываются на частотной оси в декадах.

Как известно из работы [2], для ЛАЧХ и ЛФЧХ являются характерными две частоты — частота среза  $\omega_{cp}$  и критическая частота  $\omega_{кр}$ , которые находят из уравнений:

$$L(\omega_{cp}) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -\pi \quad (18)$$

и которые имеют графическую интерпретацию, представленную на рис. 1.

Согласно критерию Найквиста [2], если, как показано на рис. 1а, для устойчивого динамического объекта выполняется условие

$$\omega_{cp} < \omega_{кр}, \quad (19)$$

тогда он остается устойчивым и после замыкания его единичной отрицательной обратной связью. То есть в таком объекте характер процессов к его замыканию единичной отрицательной обратной связью и после замыкания не изменяется.

Если для динамического объекта, устойчивого в разомкнутом состоянии, выполняется условие (см. рис. 1б),

$$\omega_{cp} > \omega_{кр}, \quad (20)$$

то он становится неустойчивым после замыкания его единичной отрицательной обратной связью. То есть в таком объекте характер процессов к его замыканию единичной отрицательной обратной связью и после замыкания изменяется.

Поэтому лишь в случае выполнения условия (19) для многомерного динамического объекта могут использоваться для описания процессов в нем эквивалентные модели в виде (3) и (4), поскольку для первой из них, как известно [2], справедливым является неравенство

$$\varphi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (21)$$

а для второй из них справедливым является неравенство

$$\varphi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (22)$$

Если же для многомерного динамического объекта выполняется условие (20), то для описания процессов в нем нельзя использовать эквивалентные модели (3), (4) а необходимо использовать эквивалентную модель (2), поскольку лишь для нее справедливой является система неравенств

$$\begin{aligned} \varphi_3(\omega) &\geq -\pi, & \forall \omega \in [0, \omega_{кр}], \\ \varphi_3(\omega) &< -\pi, & \forall \omega \in (\omega_{кр}, \infty), \end{aligned} \quad (23)$$

с которой совпадает неравенство (20) вблизи критической частоты  $\omega_{кр}$ .

Из рис. 1 видно, что для динамического объекта  $n$ -го порядка справедливой является система неравенств

$$\begin{aligned} L(\omega) &\geq 0, & \forall \omega \in [0, \omega_{cp}], \\ L(\omega) &< 0, & \forall \omega \in (\omega_{cp}, \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

Верхнее неравенство из системы (24) свидетельствует о том, что на частотах до частоты среза динамический объект ведет себя как усилитель, для которого является справедливым неравенство

$$A(\omega) \geq 1, \quad (25)$$

а нижнее неравенство из системы (24) свидетельствует о том, что при значениях частоты, большей частоты среза, динамический объект ведет себя как фильтр, для которого является справедливым неравенство

$$A(\omega) < 1. \quad (26)$$

Из вышеизложенного следует, что при синтезе эквивалентной математической модели для многомерного динамического объекта, который функционирует в режиме преобразователя входного сигнала в выходной без необходимости его замыкания единичной отрицательной обратной связью, обязательно необходимо учитывать условия (25), (26). А при синтезе эквивалентной математической модели для многомерного динамического объекта, управление которым будет осуществляться с использованием единичной отрицательной обратной связи, обязательно необходимо учитывать условия (20), (23).

В этой статье мы представляем метод синтеза эквивалентной математической модели для многомерного динамического объекта, который функционирует в режиме преобразователя входного сигнала в выходной, а метод синтеза эквивалентной математической модели для многомерного динамического объекта, управление которым будет осуществляться с использованием единичной отрицательной обратной связи, будет представлен в нашей следующей статье.

### Решение поставленной задачи

Поскольку для многомерного динамического объекта, который функционирует в режиме передачи сигнала со входа на выход, при его эквивалентировании необходимо обеспечить одинаковость характера решений основной математической модели (1) и эквивалентной модели из множества (2) – (4), которыми мы будем описывать процессы в этом объекте, как в частотной области усиления сигналов, так и в частотной области их фильтрации, то и графики ЛАЧХ  $L(\omega)$  основной модели (1) и графики асимптотических ЛАЧХ  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  эквивалентных моделей (2) – (4) должны начинаться с одной и той же точки при наименьшем начальном значении  $\omega_n$  частоты  $\omega$ , в которой

$$L(\omega_n) = L_1(\omega_n) = L_2(\omega_n) = L_3(\omega_n), \quad (27)$$

и проходить через одну и ту же точку на частоте среза  $\omega_{cp}$ , то есть иметь ориентировочный вид, показанный на рис. 2.

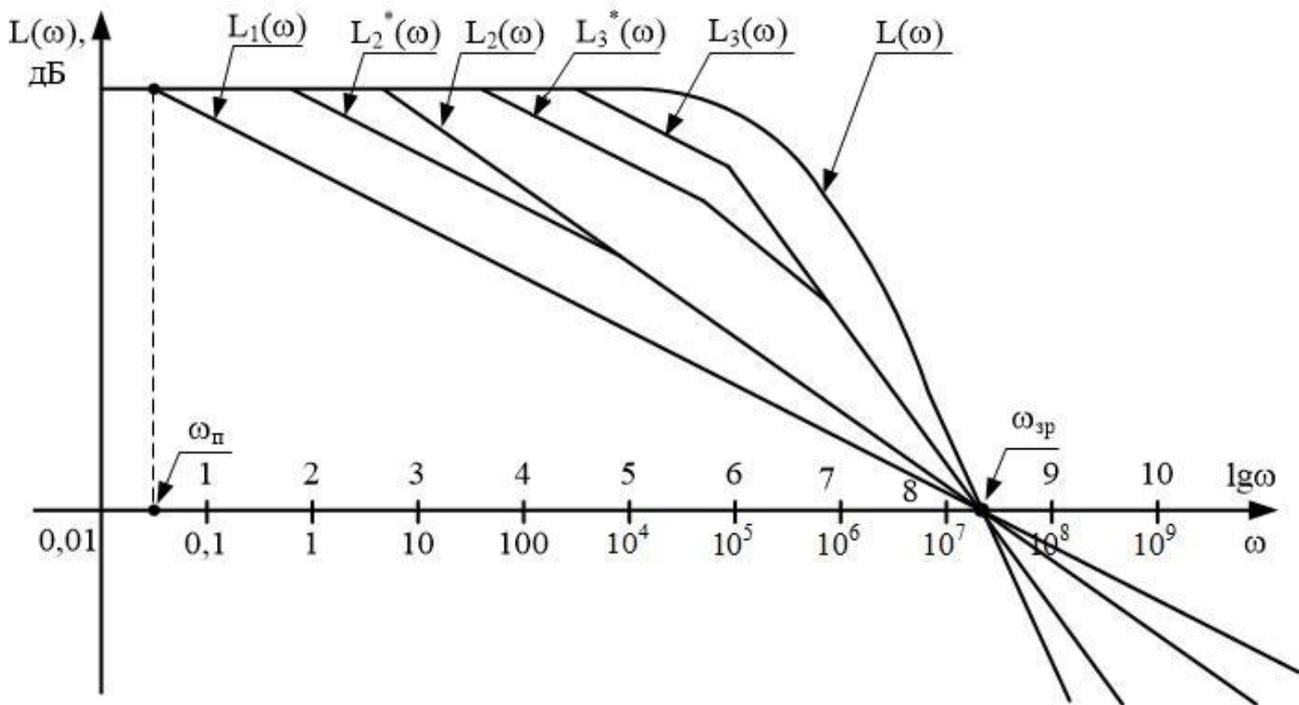


Рис. 2. Ориентировочный вид графика ЛАЧХ основной модели многомерного динамического объекта и графиков асимптотических ЛАЧХ его эквивалентных моделей

Для дальнейшего решения задачи будем считать, что у нас есть возможность подать на вход динамического объекта, эквивалентную математическую модель которого мы синтезируем, единичный ступенчатый сигнал (5), реакция на который позволяет нам определить, какие из требований (6) – (9) выполняются, и есть возможность экспериментально снять амплитудную  $A(\omega)$  и фазовую  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики объекта в виде последовательностей  $A(\omega_s)$ ,  $\varphi(\omega_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  с помощью стандартного комплекта приборов, который серийно выпускают и который включают в себя генератор синусоидальных сигналов, двойной пиковый вольтметр и частотомер-фазометр и дополняется устройствами сопряжения этих приборов с входом и выходом динамического объекта. А к логарифмическим частотным характеристикам объекта нам помогают перейти соотношения (16). Поэтому, имея ЛАЧХ  $L(\omega)$ , с помощью соотношения (17) мы легко находим частоту среза  $\omega_{cp}$  динамического объекта.

Как известно из теории автоматического управления [2] и показано на рис. 2, график асимптотической ЛАЧХ  $L_1(\omega)$  математической модели первого порядка имеет лишь два прямолинейных отрезка — начальный с нулевым наклоном и конечный с наклоном 20 дБ на декаду. График асимптотической ЛАЧХ математической модели второго порядка имеет или два прямолинейных отрезка (если полюсами передаточной функции (12) является пара комплексно сопряженных чисел), первый из которых имеет нулевой наклон, а второй имеет наклон 40 дБ на декаду — это график  $L_2(\omega)$  на рис. 2, или три прямолинейных отрезка (если полюсами передаточной функции (12) является пара вещественных отрицательных чисел), первый из которых имеет нулевой наклон, второй имеет наклон 20 дБ на декаду, а третий имеет наклон 40 дБ на декаду — это график  $L_2^*(\omega)$  на рис. 2. График асимптотической ЛАЧХ математической модели третьего порядка имеет или три прямолинейных отрезка (если полюсами передаточной функции (13) является одно вещественное отрицательное число и два комплексно сопряженных числа), первый из которых имеет нулевой наклон, второй имеет наклон 20 дБ на декаду (или 40 дБ на декаду), а третий имеет наклон 60 дБ на

декаду — это график  $L_3(\omega)$  на рис. 2, или четыре прямолинейных отрезка (если полюсами передаточной функции (13) являются три вещественных отрицательных числа), первый из которых имеет нулевой наклон, второй имеет наклон 20 дБ на декаду, третий имеет наклон 40 дБ на декаду, а четвертый имеет наклон 60 дБ на декаду — это график  $L_3^*(\omega)$  на рис. 2. Из этого всего запомним лишь то, что наклон последнего прямолинейного отрезка графика асимптотической ЛАЧХ, пересекающего частотную ось в точке  $\omega_{cp}$  для объекта с моделью 1-го порядка (4) равен 20 дБ на декаду, для объекта с моделью 2-го порядка (3) равен 40 дБ на декаду, а для объекта 3-го порядка (2) равен 60 дБ на декаду.

А дальше, воспользовавшись выражениями (11) – (16), найдем, что

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg K_1 - 10 \lg(1 + a_1^2 \omega^2), \\ \varphi_1(\omega) &= -\arctg(a_1 \omega); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} L_2(\omega) &= 20 \lg A_2(\omega) = 20 \lg K_2 - 10 \lg[(1 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2], \\ \varphi_2(\omega) &= -\arctg \frac{a_1 \omega}{1 - a_2 \omega^2}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} L_3(\omega) &= 20 \lg A_3(\omega) = 20 \lg K_3 - 10 \lg[(1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega - a_3 \omega^3)^2], \\ \varphi_3(\omega) &= -\arctg \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3}{1 - a_2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно общепринятому подходу в теории идентификации [3] в качестве критериев эквивалентирования в нашей задаче мы тоже воспользуемся стандартными критериями наименьших квадратов в нашем случае относительно экспериментально снятой ЛАЧХ многомерного объекта  $L(\omega_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  и ЛАЧХ эквивалентных моделей  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , то есть воспользуемся функционалами:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_1(\omega_s))^2, \quad (31)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_2(\omega_s))^2, \quad (32)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_3(\omega_s))^2, \quad (33)$$

подставляя в которые выражения для  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , взятые из соотношений (28)–(30), будем иметь:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_1 + 10 \lg(1 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (34)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_2 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (35)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_3 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + (a_1 \omega_s - a_3 \omega_s^3)^2))^2. \quad (36)$$

Дальше согласно стандартной процедуре метода наименьших квадратов в случае, если мы в качестве эквивалентной математической модели выбираем дифференциальное уравнение

(4), то должны были бы взять частные производные от  $\Sigma_1$  по неизвестным коэффициентам  $K_1, a_1$ , приравнять эти производные к нулю и, решив полученную систему двух уравнений относительно двух неизвестных  $K_1, a_1$ , получить числовые значения этих двух неизвестных коэффициентов.

Аналогично в случае, если мы в качестве эквивалентной математической модели выбираем дифференциальное уравнение (3), то должны были бы взять частные производные от  $\Sigma_2$  по неизвестным коэффициентам  $K_2, a_1, a_2$ , приравнять эти производные к нулю и, решив полученную систему трех уравнений относительно трех неизвестных  $K_2, a_1, a_2$ , получить числовые значения этих неизвестных коэффициентов.

А если мы в качестве эквивалентной математической модели выбираем дифференциальное уравнение (2), то должны были бы взять частные производные от  $\Sigma_3$  по неизвестным коэффициентам  $K_3, a_1, a_2, a_3$ , приравнять эти производные к нулю и, решив полученную систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $K_3, a_1, a_2, a_3$ , получить числовые значения этих неизвестных коэффициентов.

Но если мы так поступим, то получим модели процессов в динамических объектах, решения которых будут приближаться к реальным процессам в среднеквадратичном, не совпадая со значениями реальных процессов на концах диапазонов, которые в частотной области будут задаваться частотами  $\omega_n$  и  $\omega_{cp}$  и для которых должны выполняться требования (17) и (27), выполняющиеся при эквивалентировании обязательно.

Поэтому выходит, что при эквивалентировании математической модели многомерного динамического объекта математической моделью (4), содержащей лишь два неизвестных параметра  $K_1, a_1$ , нам для их определения нужно иметь систему лишь из двух уравнений, которую можно построить и без взятия частных производных от выражения (34), а воспользовавшись предельными условиями (17), (27), ведь из (27) в связи с малостью  $\omega_n$  следует, что

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_1, \quad (37)$$

а из (17) следует, что

$$20 \lg K_1 - 20 \lg a_1 - 20 \lg \omega_{cp} = 0. \quad (38)$$

Решая систему уравнений (37), (38), получим:

$$K_1 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_{cp}} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (39)$$

Однако при эквивалентировании математической модели многомерного динамического объекта математической моделью (3), содержащей три неизвестных параметра  $K_1, a_1, a_2$ , для их определения нужно иметь систему из трех уравнений, которую построить, воспользовавшись лишь предельными условиями (17), (27) уже не удастся, поскольку эти предельные условия дают нам лишь два уравнения, а именно:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_2, \quad (40)$$

$$20 \lg K_2 - 20 \lg a_2 - 40 \lg \omega_{cp} = 0, \quad (41)$$

из которых получим:

$$K_2 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_2 = \frac{1}{\omega_{cp}^2} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (42)$$

А что же касается третьего неизвестного параметра  $a_1$ , то в этом случае для его определения уже необходимо брать частные производные по нему от выражения (35) и получать, приравняв эту производную к нулю, в добавление к уравнениям (42) еще и третье уравнение —

$$\sum_{i=1}^N \left[ L(\omega_i) - \lg \frac{10K_2^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} \right] \frac{\omega_i^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} = 0 \quad (43)$$

нелинейное, но с одним неизвестным, для решения которого, например, в пакете прикладных программ Mathcad, заложена стандартная процедура.

Что же касается эквивалентирования математической модели многомерного динамического объекта математической моделью (2), содержащей четыре неизвестных параметра  $K_1, a_1, a_2, a_3$ , то нам для их определения нужно иметь систему из четырех уравнений, которую построить, воспользовавшись лишь предельными условиями (17), (27) тоже не удастся, поскольку эти предельные условия дают нам лишь два уравнения, а именно:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_3, \quad (44)$$

$$20 \lg K_3 - 20 \lg a_3 - 60 \lg \omega_{cp} = 0, \quad (45)$$

из которых будем иметь:

$$K_3 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_3 = \frac{1}{\omega_{cp}^3} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (46)$$

А что же касается еще двух неизвестных параметров  $a_1, a_2$ , то в этом случае для их определения уже необходимо брать две частные производные по ним от выражения (36) и получать, приравняв эти производные к нулю, в дополнение к уравнениям (46) еще два уравнения:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \cdot \frac{a_1\omega_s^2 - a_3\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right\} = 0, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^N \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \frac{\omega_s^2 - a_2\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} = 0, \quad (48)$$

решив которые как систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными по стандартной процедуре в пакете прикладных программ Mathcad мы и получим в дополнение к уже найденным ранее по выражениям (46) численным значениям параметров  $K_3, a_3$  также и численные значения параметров  $a_1, a_2$ .

Но определением полного множества параметров эквивалентных моделей (2), (3) (4) не завершается процедура синтеза эквивалентной математической модели многомерного динамического объекта, ведь нужно оценить еще и погрешность эквивалентирования, к процедуре построения методики определения которой мы и перейдем.

### Оценка погрешности эквивалентирования

Как видно из рис. 3, погрешность эквивалентирования моделями (2) – (4) многомерного

динамического объекта в частотной области можно записать так:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i(j\omega) &= Y(j\omega) - Y_i(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega) - W_i(j\omega)X(j\omega) = \\ &= (W(j\omega) - W_i(j\omega))X(j\omega) = W_{\Delta i}(j\omega)X(j\omega), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (49)$$

где АФЧХ динамического объекта по погрешности эквивалентирования  $W_{\Delta i}(j\omega)$  может быть представлена и так:

$$\begin{aligned} W_{\Delta i}(j\omega) &= W(j\omega) - W_i(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} - A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} = \\ &= [A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)] + j[A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)] = A_{\Delta i}(\omega)e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)}, \quad (50) \\ & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где амплитудная частотная характеристика (АЧХ) динамического объекта по погрешности эквивалентирования — это:

$$A_{\Delta i}(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + A_i^2(\omega) - 2A(\omega)A_i(\omega)\cos(\varphi(\omega) - \varphi_i(\omega))}, \quad (51)$$

а фазовая частотная характеристика (ФЧХ) — это:

$$\varphi_{\Delta i} = \text{arctg} \frac{A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)}{A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)}. \quad (52)$$

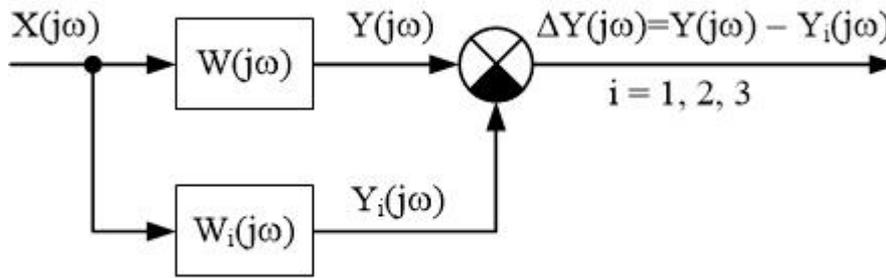


Рис. 3. Структурная схема формирования погрешности эквивалентирования многомерного динамического объекта

Если в выражении (49) задать все комплексные величины в показательной форме, то получим выражение —

$$\Delta Y_i(\omega)e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)} = A_{\Delta i}(\omega)X(\omega)e^{j(\varphi_{\Delta i}(\omega) + \varphi_X(\omega))}, \quad (53)$$

из которого следует, что АЧХ динамического объекта по погрешности эквивалентирования  $\Delta Y_i(\omega)$  будет равно —

$$\Delta Y_i(\omega) = A_{\Delta i}(\omega)X(\omega), \quad (54)$$

где  $X(\omega)$  — АЧХ входного сигнала динамического объекта.

Как известно [4], используя равенство Парсевалья, средний квадрат погрешности  $\overline{\Delta y_i(t)}$ , характеризующий ее среднюю мощность, можно определить из выражения:

$$\overline{\Delta y_i(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta Y_i(\omega)]^2 d\omega, \quad (55)$$

подставляя в которое выражение (54) и замещая интеграл суммой значений в точках дискретизации спектра, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] X^2(\omega_s), \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\Delta\omega$  — интервал дискретизации по частоте в логарифмическом масштабе,  $\omega_{\max}$  — верхняя частота полосы пропускания динамического объекта, а количество дискрет  $m$  находится из выражения:

$$m = \frac{\omega_{\max} - \omega_n}{\Delta\omega}. \quad (57)$$

Наибольшей средняя погрешность  $\overline{\Delta y_i(t)}$  будет при обработке динамическим объектом скачкообразного входного сигнала (5), для которого

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (58)$$

Подставляя  $X(\omega)$  из (58) в (56), получим:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] \frac{1}{\omega_s^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

По аналогии с выражениями (55), (56) (58) и (59) среднюю мощность  $\overline{y(t)}$  исходного сигнала  $y(t)$  динамического объекта как его реакцию на входной единичный сигнал (5) можно представить в виде —

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [Y(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m A^2(\omega_s) \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (60)$$

С учетом выражений (59) и (60) относительный средний квадрат погрешности эквивалентирования  $\overline{\delta y_i(t)}$ , выраженный в процентах, можно представить в виде —

$$\overline{\delta y_i(t)} = \frac{\overline{\Delta y_i(t)}}{\overline{y(t)}} 100\%, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (61)$$

Рассчитывая по выражению (61) с учетом выражений (59) и (60) относительный средний квадрат погрешности эквивалентирования, мы и будем принимать решение удовлетворяет нас выбранная эквивалентная модель многомерного динамического объекта или нет.

### Выводы

1. Предложен метод идентификации процессов в многомерных динамических объектах, допускающих линеаризацию и работающих в режиме прямой передачи сигнала, математическими моделями не выше третьего порядка, эквивалентными по частоте среза.

2. Алгоритм метода основан на системе уравнений, одна часть которых синтезируется с учетом предельных условий, задаваемых частотой среза, а другая часть синтезируется по стандартной процедуре метода наименьших квадратов относительно логарифмических частотных характеристик.

3. В качестве критерия возможности эквивалентирования многомерного динамического

объекта выбранной эквивалентной математической моделью предложено использовать относительный средний квадрат погрешности эквивалентирования, для которого получена вычислительная форма.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мокін О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — №4. — С. 7 – 15.
2. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.
3. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Цыпкин Я. З. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Бабак В. П. Обробка сигналів / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. — К.: Либідь, 1999. — 496 с.

**Мокін Александр Борисович** – д. т. н., профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов (ВЭТЭСК), e-mail: [abmokin@gmail.com](mailto:abmokin@gmail.com).

**Мокін Виталий Борисович** – д. т. н., профессор, заведующий кафедрой компьютерного эколого-экономического мониторинга та инженерной графики, e-mail: [vbmokin@gmail.com](mailto:vbmokin@gmail.com).

**Мокін Борис Иванович** – акад. Национальной АПН Украины, д. т. н., проф., профессор кафедры ВЭТЭСК.

**Чернова Ирина Александровна** – инженер научно-исследовательской части.  
Винницкий национальный технический университет.