УДК 621.3(075)

Ю. Г. Ведмицкий, к. т. н.; В. В. Кухарчук, д. т. н., проф.

ПЕРЕХОДНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ СХЕМЫ, ЗАКОНЫ КИРХГОФА И КОМПОНЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В КОМПЛЕКСНО-ВРЕМЕННОЙ ФОРМЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В статье разработано понятие переходной комплексной схемы электрической цепи и определены её наиболее важные свойства – законы Кирхгофа и компонентные соотношения в комплексно-временной форме отображения, которые в своем единстве образуют основу теоретического базиса символьно-классического метода решения задачи Коши, сформулированной в терминах мгновенных комплексных токов и напряжений для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях синусоидального и периодического несинусоидального токов.

Ключевые слова: *электрическая цепь, переходной процесс, задача Коши, символьно-классический метод, мгновенные комплексные токи и напряжения, законы Кирхгофа, компонентные соотношения, дифференциальные уравнения движения, законы коммутации в комплексной форме.*

Введение

Разработка и усовершенствование методов расчета и анализа переходных процессов в электрических цепях синусоидального тока и до сего дня остаётся важной и актуальной задачей при исследовании электротехнических систем с периодической формой движения.

Такой статус задачи обусловлен её практической востребованностью – в своём проявлении многообразной как по глубине проникновения, так и по ширине охвата [1], что находит своё объяснение, с одной стороны, повышенной, а временами даже и недопустимо критической, чувствительностью рабочих параметров и характеристик указанных технических систем, например, объектов силовой электроэнергетики или электромеханики, к режимам переходного процесса, который неоднократно может происходить в этих системах даже на протяжении одного производственного цикла, а с другой – охватом ареала таких систем и их общим совокупным влиянием на техногенную сферу в целом.

В то же время важной остаётся и чисто теоретическая составляющая указанной задачи [2], поскольку система тригонометрических функций с кратными частотами вида $\cos\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$ и $\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$, где $m=(1,\ 2,...)$, представляет собой один из фундаментальных и наиболее востребованных ортогональных нормированных базисов гильбертового пространства мгновенных напряжений и токов, элементы которого в состоянии определять эволюционное движение каждой из заявленных выше технических систем не только в установившемся режиме работы, но и во время переходного процесса. В последнем случае физический переходной процесс должен сопровождаться одновременным изменением во времени всех коэффициентов тригонометрического ряда Фурье, а при условии постоянства периода T – даже способен пребывать в отношении эквивалентности к такому изменению. Для линейных или линеаризованных электротехнических систем с периодической формой движения это значит, что задачу Коши, которая, как известно, является математической интерпретацией задачи анализа переходного процесса в физических и технических системах с сосредоточенными параметрами, можно сформулировать и решить относительно каждой гармонической составляющей из тригонометрического ряда в отдельности, а после найти окончательное её решение, воспользовавшись принципом наложения (или иначе – принципом суперпозиции). В то же время, поскольку коэффициенты Фурье каждой из переходных гармоник, например, тока, непосредственно определяют её амплитуду и начальную фазу, вследствие чего та приобретает вид

$$i^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t) sin\left[m\,\omega t + \psi_i^{(m)}(t)\right], \tag{1}$$

саму задачу Коши целесообразно формулировать не в терминах мгновенных токов $i^{(m)}(t)$ (или напряжений), но в терминах их комплексных изображений, то есть *мгновенных комплексных токов*

$$\underline{I}_m^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t)\, e^{j\psi_i^{(m)}(t)}, \tag{2}$$

где

$$i^{(m)}(t) = Im\left\{\underline{I}_m^{(m)}(t) e^{j m \omega t}\right\}. \tag{3}$$

При таком подходе, как это показано в работе [3], оба множества функций $I_m^{(m)}(t)$ и $\psi_i^{(m)}(t)$, а в случае изменения во время переходного процесса периода $T(t)$ – ещё и функций $m\,\omega(t)$, их первые и высшие производные, интегралы, интегральные преобразования как в отдельности, так и в различных сочетаниях в состоянии выявлять и описывать не только видимые, но и глубинные, скрытые и аномальные свойства переходного процесса в электрической цепи как в качественной форме, так и аналитически.

Стоит заметить, что теоретическая электротехника задачу анализа переходного процесса на сегодня в состоянии системно и результативно решать практически во всех её проявлениях. Для этого предлагают довольно много методов расчета, среди которых – классический, операторный, спектральный методы, метод интеграла Дюамеля и т. п. Сущность указанных методов подробно раскрывают в многочисленных научных и учебных литературных источниках, например, [4 – 13]. В то же время, как показывает исследование большинства из названных изданий, фундаментальную задачу Коши формулируют в них исключительно в терминах мгновенных токов и напряжений. Такой подход доминирует и в тех случаях, когда с целью решения обозначенной задачи используют интегральные преобразования, в частности интегралы Фурье, Лапласа или Карсона. К сожалению, возможность формирования задачи Коши относительно функций мгновенных *комплексных* токов вида (2) в названной библиографии не только не раскрывается, о ней даже не упоминается. Вероятно, именно это обстоятельство и объясняет тот факт, что методическое сопровождение данного подхода, несмотря на востребованность, пребывает на сегодняшний день в недостаточно разработанном и неудовлетворительно развёрнутом состоянии.

Поэтому целью данной работы является разработка на основе функций вида (2) понятия переходной комплексной схемы электрической цепи, определение существенных признаков и фундаментальных свойств такой схемы, в частности законов Кирхгофа и компонентных соотношений в комплексно-временной форме отображения, разработка основных принципов и правил её построения. Разработанные теоретические понятия и соотношения в своей совокупности должны стать важными элементами теоретического базиса символьно-классического метода – одного из информативных методов расчета и анализа переходных процессов в линейных цепях синусоидального тока [3].

1 Дифференциальное уравнение переходного процесса в комплексной форме

Прежде всего заметим, что сейчас и в последующем результаты исследования будут приведены исключительно в отношении первой (т. е. основной) гармоники тригонометрического ряда Фурье, но в то же время выписанные для неё соотношения с учетом порядка кратности будут сохранять свою силу и в отношении высших гармоник.

Известно, что переходной процесс в линейной электрической цепи с несколькими источниками синусоидального напряжения одинаковой частоты

$$u_1 = U_{m_1} \sin(\omega t + \psi_{u_1}), \; \ldots, \; u_v = U_{m_v} \sin(\omega t + \psi_{u_v})$$

можно описать линейным обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, составленным относительно, например, некоторого мгновенного тока $i(t)$ вида (1) на основе законов Кирхгофа и компонентных соотношений,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v} \sum_{s=0}^{w} b_{sq} \frac{d^s u_q}{d t^s} \tag{4}$$

с n начальными условиями: $i(0_+)$, $\dfrac{d\,i(0_+)}{d\,t}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} i(0_+)}{d\,t^{n-1}}$.

В то же время, учитывая соотношение (3), определенную в виде (4) задачу Коши допустимо, а во многих случаях и целесообразно, формулировать иначе – в терминах мгновенных комплексных токов и напряжений. При такой интерпретации переходной процесс в цепи будет отображаться дифференциальным уравнением в комплексной форме, дополненным n начальными условиями вида: $\underline{I}_m(0_+)$, $\dfrac{d\,\underline{I}_m(0_+)}{d\,t}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}\,\underline{I}_m(0_+)}{d\,t^{n-1}}$. Само же уравнение будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{A}_k \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d\,t^k} = \sum_{q=1}^{v} \left(\underline{B}_{0_q} \cdot \underline{U}_{m_q} \right). \tag{5}$$

Комплексные коэффициенты в уравнении (5) могут быть определены по-разному.

Например, их можно рассчитать через коэффициенты дифференциального уравнения (4), но при условии, что такое настоящее уравнение для заданной цепи будет получено предварительно. Тогда, как показано в работе [3], для электрической цепи *произвольного* порядка (с предварительно не заданным числом степеней свободы) закон преобразования коэффициентов уравнения (4) в соответствующие им коэффициенты уравнения (5) будет пребывать в подчинении к *биному Ньютона* и будет иметь такой вид:

$$\underline{A}_k = \sum_{p=0}^{n-k} \left[\frac{(k+p)!}{k!\; p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p} \right], \quad \underline{B}_{0_q} = \sum_{s=0}^{n} (j\omega)^s\, b_{qs}\,, \tag{6}$$

поскольку, во-первых, каждая k-тая производная мгновенного тока $i(t)$ в левой части (4) может быть определена через мгновенный комплексный ток $\underline{I}_m(t)$ и его производные как

$$a_k \frac{d^k i}{d\,t^k} = Im\left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k} \left[\frac{k!}{p!(k-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p} \underline{I}_m(t)}{d\,t^{k-p}} \right] \cdot e^{j\omega t} \right\}, \tag{7}$$

что позволяет в дальнейшем произвести перегруппировку и привести полученное выражение к виду левой части формулы (5):

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k} \left[\frac{k!}{p!(k-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p} \underline{I}_m(t)}{d\,t^{k-p}} \right] \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{p=0}^{n-k} \left[\frac{(k+p)!}{k!\; p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p} \right] \cdot \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d\,t^k} \right\},$$

и, во-вторых, каждая s-тая производная уже в правой части уравнения (4) также может быть записана подобным образом и на этой основе с учетом неизменности во времени амплитуд, начальных фаз и частоты внешних источников энергии переписана в комплексной форме, приведенной к форме правой части формулы (5):

$$\sum_{q=1}^{v}\left(\sum_{s=0}^{n} b_{sq}\,\frac{d^{s} u_{q}}{d\,t^{s}}\right)=Im\left\{\sum_{q=1}^{v}\left[\sum_{s=0}^{n}\left((j\omega)^{s}\cdot b_{sq}\right)\cdot \underline{U}_{m_q}\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}=Im\left\{\sum_{q=1}^{v}\left(\underline{B}_{0_q}\,\underline{U}_{m_q}\right)\cdot e^{j\omega t}\right\}.$$

В то же время необходимо заметить, что кроме опосредованного способа коэффициенты уравнения (5), собственно, как и само уравнение, могут быть получены непосредственно с помощью переходной комплексной схемы исследуемой цепи и законов

Кирхгофа в комплексно-временной форме отображения, что позволит избежать необходимости предварительного составления уравнения (4) и определения его коэффициентов последующим расчетом с помощью формул (6).

2 Переходные комплексные схемы, законы Кирхгофа и компонентные соотношения в комплексно-временной форме отображения

Мгновенные комплексные токи и напряжения являются самодостаточными аналитическими объектами, вследствие чего дифференциальное уравнение вида (5) может быть построено по единым правилам в удобный и общепринятый в теоретической электротехнике способ, то есть с помощью топологически структурированных и императивно подчинённых объектов.

Введём понятие переходной комплексной схемы, которой будем называть схематично и топологически структурированный двухполюсными элементами объект с мгновенными комплексными токами в ветках и напряжениями на его участках, математически связанными между собой законами Кирхгофа и компонентными соотношениями, выписанными в комплексно-временной форме отображения.

Законы Кирхгофа в комплексно-временной форме являются основой для формирования системы интегро-дифференциальных уравнений, составленных относительно мгновенных комплексных токов в ветках и напряжений на них, которые в последующем можно использовать и для построения дифференциальных уравнений вида (5) или (4), и самостоятельно – для более глубокого исследования переходных процессов в электрической цепи.

Сформулируем указанные законы.

Первый закон Кирхгофа в комплексно-временной форме утверждает, что алгебраическая сумма мгновенных комплексных токов веток, которые сходятся к узлу переходной комплексной схемы, в любой момент времени равна нулю:

$$\sum_{l=1}^{h}\underline{I}_{m_l}(t)=0. \tag{8}$$

Второй закон Кирхгофа в комплексно-временной форме, в свою очередь, устанавливает, что алгебраическая сумма мгновенных комплексных напряжений на отдельных элементах произвольного замкнутого контура переходной комплексной схемы в любой момент времени равна нулю:

$$\sum_{l=1}^{c}\underline{U}_{m_l}(t)=0. \tag{9}$$

Методика составления системы уравнений по законам Кирхгофа в комплексно-временной форме не отличается от общепринятой.

Необходимо заметить, что оба приведенных закона Кирхгофа в комплексно-временной форме скорее являются постулатами, поскольку этим законам свойственна более высокая степень обобщенности, их невозможно ни ввести, ни обосновать из-за законов Кирхгофа, которые выписаны относительно мгновенных напряжений и токов (т. е. в классической форме). В то же время такая обобщенность тесно связывает обе формы и исключает возникновение противоречий между ними. Действенность законов Кирхгофа в комплексно-временной форме не только не подвергает сомнению, но и предполагает дееспособность их классических аналогов. Такой характер отношения между известными и индуктивно введёнными формами законов Кирхгофа чрезвычайно важен, поскольку служит необходимым условием истинности последних. В то же время подтвердить и окончательно утвердить такой статус, или же, что не исключено, и обратное – опровергнуть его, конечно же, должна практическая проверка – исключительно требовательная, продолжительная и всесторонняя.

Одним из важнейших следствий вышесказанного является и то, что законы Кирхгофа в комплексно-временной форме благодаря своему свойству обобщенности подчиняют себе не только установившиеся режимы работы электрических цепей синусоидального тока, но и переходные процессы, что происходят в них, в отличие от законов Кирхгофа в комплексной форме, которые, как известно, выстроены на основе классических законов для теоретического сопровождения распространённого метода комплексных амплитуд (символического метода) с целью расчёта установившихся режимов в указанных электрических цепях.

Для расчёта и анализа переходных процессов, кроме законов Кирхгофа в комплексно-временной форме отображения (8) и (9), необходимо использовать ещё и специальные математические уравнения, которые в теоретической электротехнике совокупно называют *компонентными соотношениями*. Эти соотношения устанавливают математические связи между мгновенными напряжениями и токами на отдельных идеализированных пассивных элементах электрической цепи. Естественно, что в нашем случае такие связи должны быть переписаны в комплексно-временной форме. Важно подчеркнуть, что в компонентных соотношениях между мгновенными напряжениями и токами пассивных двухполюсных элементов находят своё отображение некоторые основные законы электротехники, в частности законы Ома и электромагнитной индукции Фарадея, поэтому компонентные соотношения, представленные комплексно-временной формой, также должны быть непосредственным отображением упомянутых законов.

Из сказанного выше следует, что в состав переходных комплексных схем должны входить элементы только с такими свойствами, при которых мгновенные комплексные токи и напряжения будут биективно соответствовать мгновенным токам и напряжениям на отдельных элементах реальных электрических цепей. Только такое взаимное соответствие и должно стать той первоосновой, которая сможет обеспечить необходимую адекватность полученных результатов исследования реалиям исходной задачи во время анализа динамических режимов с помощью переходных комплексных схем.

Таким образом, для основных пассивных двухполюсных элементов электрической цепи: активного сопротивления, индуктивности и ёмкости – компонентные соотношения в комплексно-временной форме сформируем на основе классических соотношений, записанных для мгновенных токов и напряжений.

Резистивный элемент. Для данного двухполюсного элемента математическая связь между мгновенными напряжением и током определяют законом Ома [8]:

$$u(t) = R\,i(t), \tag{10}$$

где $u(t) = U_m(t)\sin\left[\omega t + \psi_u(t)\right]$, $i(t) = I_m(t)\sin\left[\omega t + \psi_i(t)\right]$, что с учётом (1) – (3) позволяет получить соотношение и для их комплексных изображений в виде закона Ома в комплексно-временной форме:

$$\underline{U}_m(t) = R\,\underline{I}_m(t). \tag{11}$$

Индуктивный элемент. Математическая связь между мгновенными напряжением и током на этом двухполюсном элементе обусловлена законом электромагнитной индукции Фарадея, на основе которого и вводят соответствующее компонентное соотношение [8]:

$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t). \tag{12}$$

С учётом (7), где для $k=1$ имеем $L\frac{d}{dt}i(t) = Im\left\{\left[L\frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\,\underline{I}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$, представленное компонентное соотношение позволяет выявить характер математических связей между мгновенными комплексными напряжением и током на индуктивности:

$$\underline{U}_m(t) = L\frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\,\underline{I}_m(t). \tag{13}$$

Ёмкостный элемент. Как известно [8], на этом элементе мгновенные напряжение и ток связаны компонентным соотношением:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t), \tag{14}$$

в связи с чем математическое соотношение между мгновенными комплексными напряжением и током будет иметь вид:

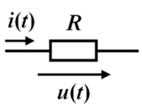
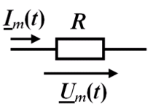
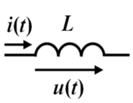
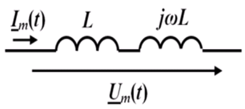
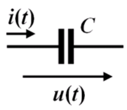
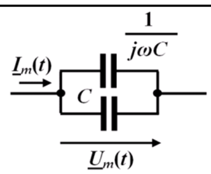
$$\underline{I}_m(t) = C\frac{d}{dt}\underline{U}_m(t) + j\omega C\,\underline{U}_m(t), \tag{15}$$

так как в соответствии с (7) $C\frac{d}{dt}u(t) = Im\left\{\left[C\frac{d}{dt}\underline{U}_m(t) + j\omega C\,\underline{U}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$.

Компонентные соотношения в комплексно-временной форме, в частности (11), (13), (15), не только раскрывают закономерности в связях между мгновенными комплексными напряжениями и токами на отдельно взятых элементах электрической цепи, они одновременно позволяют установить биективное соответствие между этими элементами и элементами переходной комплексной схемы, определив главные принципы и правила построения последней. Для основных пассивных элементов электрической цепи эти правила представлены табл. 1, где почленно в каждом столбике, расположенном слева, приведён собственно элемент исходной цепи, а справа – соответствующий ему фрагмент переходной комплексной схемы, который при условии выполнения законов Кирхгофа в состоянии обеспечить между мгновенными комплексными напряжениями и токами приведённые выше компонентные соотношения в комплексно-временной форме.

Таблица 1

Таблица соответствия между элементами электрической цепи и переходной комплексной схемы

Резистивный элемент		**Индуктивный элемент**		**Емкостной элемент**	
					
$u = Ri$	$\underline{U}_m = R\underline{I}_m$	$u = L\frac{di}{dt}$	$\underline{U}_m = L\frac{d\underline{I}_m}{dt} + j\omega L\underline{I}_m$	$i = C\frac{du}{dt}$	$\underline{I}_m = C\frac{d\underline{U}_m}{dt} + j\omega C\underline{U}_m$

3 Пример постановки задачи Коши на основе переходной комплексной схемы, законов Кирхгофа и компонентных соотношений в комплексно-временной форме

Приведём пример постановки задачи Коши в терминах мгновенных комплексных токов и напряжений с помощью переходной комплексной схемы, законов Кирхгофа и компонентных соотношений в комплексно-временной форме отображения. В то же время проведём частичную проверку адекватности указанных базисных элементов физическому течению переходного процесса в цепи синусоидального тока, который описывается мгновенными токами или напряжениями. Для этого воспользуемся одним из распространённых в теоретической электротехнике примеров топологической структуры электрической цепи 2-го порядка, схема которой показана на рис. 1, а. Рядом, на рис. 1, б, приведена её переходная комплексная схема, полученная с помощью указанных в табл. 1 правил.

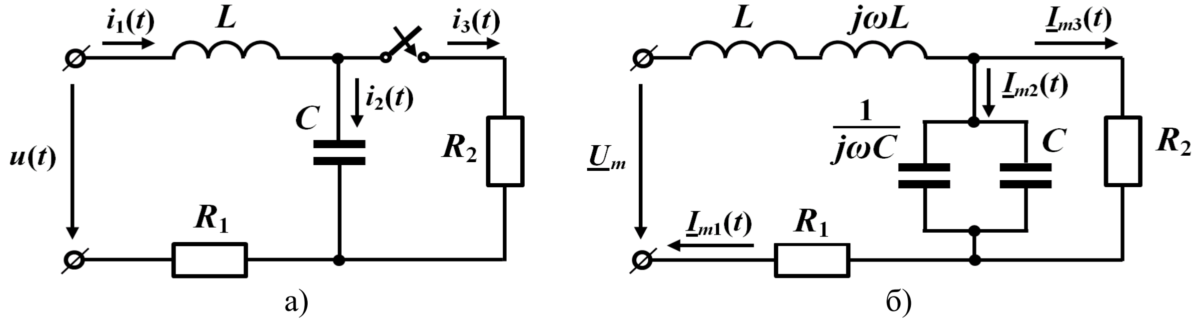


Рис. 1. Электрическая цепь 2-го порядка и её переходная комплексная схема

Система уравнений, составленная по общепринятой методике в отношении переходной комплексной схемы на основе законов Кирхгофа (8), (9) и компонентных соотношений (11), (13), (15) в комплексно-временной форме относительно мгновенных комплексных токов в ветках цепи и напряжения на ёмкостном элементе, имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_{m_1}(t) - \underline{I}_{m_2}(t) - \underline{I}_{m_3}(t) = 0; \\ \underline{I}_{m_2}(t) - C\dfrac{d}{dt}\underline{U}_{m_C}(t) - j\omega C\underline{U}_{m_C}(t) = 0; \\ L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t) + (R_1 + j\omega L)\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{U}_{m_C}(t) = \underline{U}_m; \\ R_2\underline{I}_{m_3}(t) - \underline{U}_{m_C}(t) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{const}$.

Уравнение переходного процесса несложно получить, если переписать систему (16) относительно одной из искомых функций, например, мгновенного комплексного тока $\underline{I}_{m_1}(t)$. Тогда дифференциальное уравнение будет иметь вид уравнения (5) при условии, что $n = 2$:

$$\underline{A}_2\frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{A}_1\frac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{A}_0\underline{I}_{m_1}(t) = \underline{B}_0\underline{U}_m, \tag{17}$$

где коэффициенты

$$\underline{A}_2 = LCR_2;\ \underline{A}_1 = L + CR_1R_2 + j2\omega LCR_2;\ \underline{A}_0 = R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega\left(L + CR_1R_2\right);\ \underline{B}_0 = 1 + j\omega CR_2.$$

Начальные же условия задачи Коши в указанном контексте необходимо определить с помощью комплексной схемы докоммутационной цепи на основе независимых начальных условий и законов коммутации, представленных в комплексной форме [3]:

$$\underline{I}_{m_L}(0_+)=\underline{I}_{m_L}(0)=\underline{I}_{m_L}(0_-);\quad \underline{U}_{m_C}(0_+)=\underline{U}_{m_C}(0)=\underline{U}_{m_C}(0_-).$$

В нашем случае начальными условиями искомой задачи Коши будут два соотношения:

$$\underline{I}_{m_1}(0_+)=\frac{\underline{U}_m}{R_1+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)};\quad \frac{d\underline{I}_{m_1}(0_+)}{dt}=0, \tag{18}$$

которые нетрудно получить, если воспользоваться третьим уравнением системы (16).

С целью проверки полученного результата составим дифференциальное уравнение переходного процесса относительно мгновенного тока $i_1(t)$. Для этого, воспользовавшись схемой исходной электрической цепи (см. рис. 1, а), вначале составим систему уравнений на основе законов Кирхгофа и компонентных соотношений (10), (12), (14), записанных в классической форме,

$$\begin{cases} i_1(t)-i_2(t)-i_3(t)=0; \\ i_2(t)-C\,\frac{d}{dt}u_C(t)=0; \\ L\,\frac{d}{dt}i_1(t)+R_1\,i_1(t)+u_C(t)=u(t); \\ R_2\,i_3(t)-u_C(t)=0, \end{cases} \tag{19}$$

где $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$, а потом перепишем (19) относительно $i_1(t)$. В результате получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка вида (4)

$$a_2\frac{d^2}{dt^2}i_1(t)+a_1\frac{d}{dt}i_1(t)+a_0\,i_1(t)=b_1\frac{d}{dt}u(t)+u(t) \tag{20}$$

с коэффициентами $a_2=LCR_2$; $a_1=L+CR_1R_2$; $a_0=R_1+R_2$; $b_1=CR_2$; $b_0=1$.

При такой постановке задачи Коши уравнение (20) нужно дополнить соответствующими начальными условиями, конечно же, отличающимися от (18):

$$\begin{gathered} i_1(0_+)=\frac{U_m}{\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,sin\left(\psi_u-arctg\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R_1}\right); \\ \frac{d\,i_1(0_+)}{dt}=\frac{u(0_+)-u_C(0_+)-R_1\,i_1(0_+)}{L}, \end{gathered} \tag{21}$$

где $u(0_+)=U_m\,sin\,\psi_u$; $u_C(0_+)=\dfrac{-U_m}{\omega C\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos\left(\psi_u-arctg\dfrac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R_1}\right)$.

Стоит обратит внимание на то, что в каждом конкретном случае производная мгновенного тока на момент коммутации $\dfrac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}$ чаще всего приобретает различные значения, поскольку зависит от начальной фазы входного напряжения и соотношений между параметрами элементов данной цепи. В то же время значение производной $\dfrac{d\,\underline{I}_{m_1}(0_+)}{d\,t}$ инвариантно относительно указанных параметров и всегда равно нулю.

Сравнивая коэффициенты двух дифференциальных уравнений (17) и (20), несложно заметить, что

$$\underline{A}_2 = a_2\,;\;\; \underline{A}_1 = a_1 + j2\omega a_2\,;\;\; \underline{A}_0 = a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1\,;\;\; \underline{B}_0 = b_0 - \omega^2 b_2 + j\omega b_1\,,$$

где в последнем соотношении $b_2 = 0$.

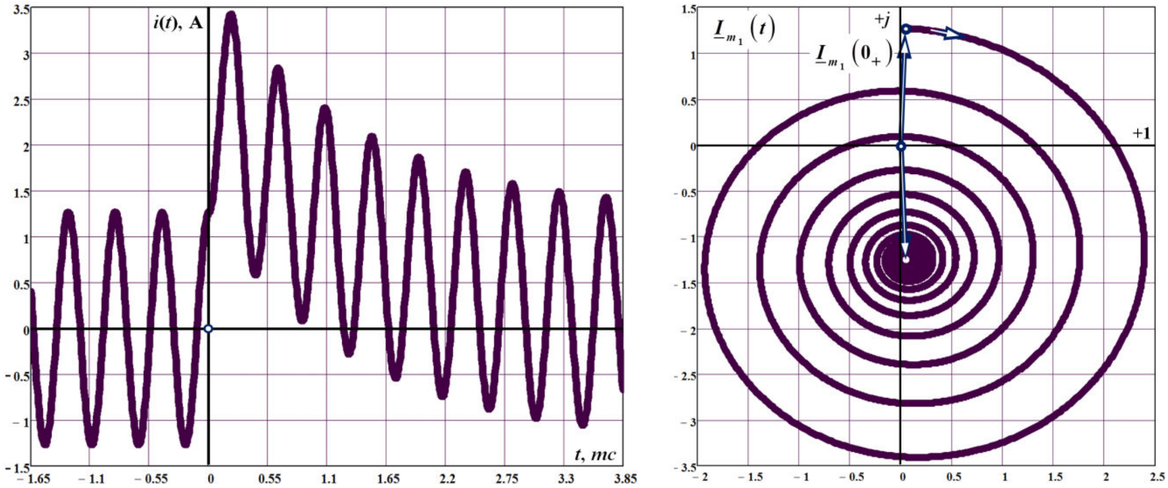
Таким образом, для заданного в условии примера случая, когда $n = 2$ и $q = 1$ (один источник питания), соотношения между группами соответствующих коэффициентов дифференциальных уравнений соответствуют формулам (6), в связи с чем и решения этих уравнений при указанных выше начальных условиях (18) и (21) не будут вступать в противоречие с формулой (3)

$$i_1(t) = Im\left\{\underline{I}_{m_1}(t)e^{j\omega t}\right\}.$$

Это значит, если только адекватным объективно существующей реальности обнаружит себя решение $i_1(t)$ задачи Коши, сформулированной для заданной электрической цепи на основе *классических* законов Кирхгофа и компонентных соотношений, то решение $\underline{I}_{m_1}(t)$ задачи Коши, которую можно сформулировать и иначе – на основе *предложенной* переходной комплексной схемы и с помощью законов Кирхгофа и компонентных соотношений в комплексно-временной форме, в указанном качестве не будет уступать первому решению и также будет адекватным реалиям переходного процесса в данной электрической цепи при прочих равных условиях.

Заключительная часть, выводы

Для примера на рис. 2 приведены два графика, которые по отдельности и прежде всего в качественной форме отображают один и тот же переходной процесс. Первый график (рис. 2, а) – это переходная волновая диаграмма мгновенного тока $i_1(t)$, второй (рис. 2, б) – временной годограф [3], построенный на основе мгновенного комплексного тока $\underline{I}_{m_1}(t)$ на комплексной плоскости.



а) б)

Рис. 2. Переходная волновая диаграмма мгновенного тока $i_1(t)$ и временной годограф мгновенного комплексного тока $\underline{I}_{m_1}(t)$

Как видно из рисунков, обе математические модели самодостаточны. В частности они явно и однозначно отображают две характерные черты настоящего переходного процесса: во-первых, существенное, чуть не в три раза (!), увеличение переходного тока в заданной цепи и радикальное изменение характера входного импеданса цепи с ёмкостного на индуктивный, во-вторых. В то же время, поскольку каждая из моделей обнаруживает присущие только ей возможности своеобразно и разнокачественно, желательно эти две математические модели, а следовательно – и обе формы задачи Коши, воспринимать не в противопоставлении одна другой по количеству возможно присущих им изъянов, но в естественном дополнении вероятными преимуществами, присущими только каждой из них, независимо от числа и глубины последних.

Только при таком подходе теория переходного процесса в цепях синусоидального тока будет постепенно приобретать свою завершённость и полноту. И только при таком подходе представленные в работе научные результаты смогут наиболее полно раскрыть свою сущность.

Таким образом, введённое и разработанное понятие переходной комплексной схемы электрической цепи, обнаруженные и описанные свойства и принципы её составления, а также сформулированные в комплексно-временной форме законы Кирхгофа и основные компонентные соотношения – все это вместе и в своём единстве образует теоретический базис символьно-классического метода, который позволяет непосредственно формулировать и решать фундаментальную задачу Коши в терминах мгновенных комплексных токов и напряжений, чем усиливает аналитические возможности исследования переходных процессов в линейных электрических цепях синусоидального и периодического несинусоидального токов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Електроніка і мікросхемотехніка : у 4-х т. Том 4. Книга 1. Силова електроніка / [за ред. В. І. Сенька]. – К. : Каравела, 2013. – 640 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Издат. «Наука», 1965. – 780 с.

3. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. – 2014. – Випуск 2. – С. 42 – 48.

4. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підручник / В. С. Перхач. – К. : Вища шк., 1992. – 439 с.

5. Теоретичні основи електротехніки : у 3-х т. : підручник [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / [В. С. Бойко та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. – К. : НТУУ "КПІ", 2008. – 224 с.

6. Теоретические основы электротехники. Т. 2 [в 3-х т.] : учебник [для вузов] / [Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л.]. – СПб : Питер, 2003. – 576 с.

7. Johnson D. H. Fundamentals of electrical engineering / D. H. Johnson, J. D. Wise. – Rice University, 1999. – 267 p.

8. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник [для студ. вищ. техн. навч. закладів] / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В., Кацив С. Ш.]. ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.

9. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах : [учебн. для электроэнергет. спец. вузов] / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1985. – 536 с.

10. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. – М. : Изд. иностр. литер., 1955. – 716 с.

11. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. – 552 p.

12. Ульянов С. А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах / С. А. Ульянов. – М. : «Энергия», 1970. – 520 с.

13. Розенфельд А. С. Переходные процессы и обобщенные функции / А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. – М. : «Наука», 1966. – 440 с.

Ведмицкий Юрий Григорьевич – к. т. н., доцент кафедры теоретической электротехники и электрических измерений.

Кухарчук Василий Васильевич – д. т. н., проф., заведующий кафедрой теоретической электротехники и электрических измерений.

Винницкий национальный технический университет.