УДК 539.3

В. М. Михалевич, д. т. н., проф.; В. О. Краевский, к. т. н.; Ю. В. Добранюк

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ПРИ ДИАГНОСТИКЕ МАТЕРИАЛА

Проанализировано и аналитически исследовано модель остаточного ресурса при двухэтапном деформировании. Определенно математически допустимые изменения параметров α_{12}, *n*, I_{12} *модели, которые входят в ее критериальное соотношение и при которых она приобретает лишь действительные значения.*

Ключевые слова: *тензорная модель; накопление повреждений; двухэтапное деформирование; функция поврежденности; остаточный ресурс; аналитическое исследование; нестационарное деформирование.*

Постановка проблемы и анализ последних исследований

Двухэтапная деформация является важным классом деформации по двум основным причинам. Во-первых, этот класс является самым простым представителем нестационарной деформации, какому свойственно множество ярко выраженных эффектов в зависимостях предельных деформаций. Во-вторых, в ряде случаев напряженно-деформированное состояние в заготовках при обработке давлением можно рассматривать, при определенном приближении, именно как двухэтапную деформацию. В таком случае упрощается анализ пригодности заготовки воспринимать данную технологическую операцию.

Целью данной работы является полное аналитическое исследование модели остаточного ресурса, полученной при помощи тензорно-нелинейной теории со степной функцией поврежденности при двухэтапном деформировании.

Следовательно, задача исследования заключается в определении математически допустимых пределов изменения параметров α_{12}, I_{12}, *n*, которые входят в критериальное соотношение (1).

Двухэтапная деформация рассматривалась во многих работах, в частности в [1], но до этого времени в литературе отсутствуют результаты полного исследования критериального соотношения, которое выплывает из тензорно-нелинейной модели со степенной функцией поврежденности.

Относительно двухэтапного деформирования из тензорно-нелинейной модели [1] получим критериальное соотношение:

$$\psi_{*2} = \left[\psi_1^n \cdot \left(\alpha_{12}^n - I_{12}\right) + \sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1}\right]^{1/n} - \psi_1 \cdot \alpha_{12} \qquad (1)$$

где $\psi_{*2} = \dfrac{\varepsilon_*^{(2)}}{\varepsilon_{*2}}$ – остаточный ресурс предельных деформаций на втором этапе деформирования; $\psi_1 = \dfrac{\varepsilon_u^{(1)}}{\varepsilon_{*1}}$ – использованный ресурс предельных деформаций на первом этапе деформирования; $\alpha_{12} = \dfrac{\varepsilon_{*1}}{\varepsilon_{*2}}$ – параметр, который характеризует порядок чередования условий деформации; $I_{12} = k_{12} \cdot a^{(1)} \cdot a^{(2)} + I_1 \cdot a^{(1)} \cdot b^{(2)} + I_2 \cdot a^{(2)} \cdot b^{(1)} + \left(I_3 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot b^{(1)} \cdot b^{(2)}$, $k_{12} = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{ij}^{(2)}$ – косинус угла излома траектории деформации; $a^{(i)}, b^{(i)}$ – значение параметров a и b на непарных и парных этапах деформирования; I_1, I_2, I_3 – инварианты произведения тензоров, причем $I_1 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(2)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$, $I_{21} = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$,

$I_1 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{kl}^{(2)} \cdot \beta_{li}^{(2)}; \varepsilon_*^{(2)}$ – величина остаточной к разрушению деформации на втором этапе деформирования; $\varepsilon_u^{(1)}$ – величина накопленной деформации на первом этапе деформирования; $\varepsilon_{*1} = \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(1)}, D^{(1)}\right)$, $\varepsilon_{*2} = \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(2)}, D^{(2)}\right)$ – предельная к разрушению деформация при стационарном деформировании (диаграмма пластичности); n – параметр, который характеризует свойства материала и режим нагрузки.

В работах [2, 3, 4] анализируются разные инварианты для использования в качестве аргументов поверхности предельных деформаций.

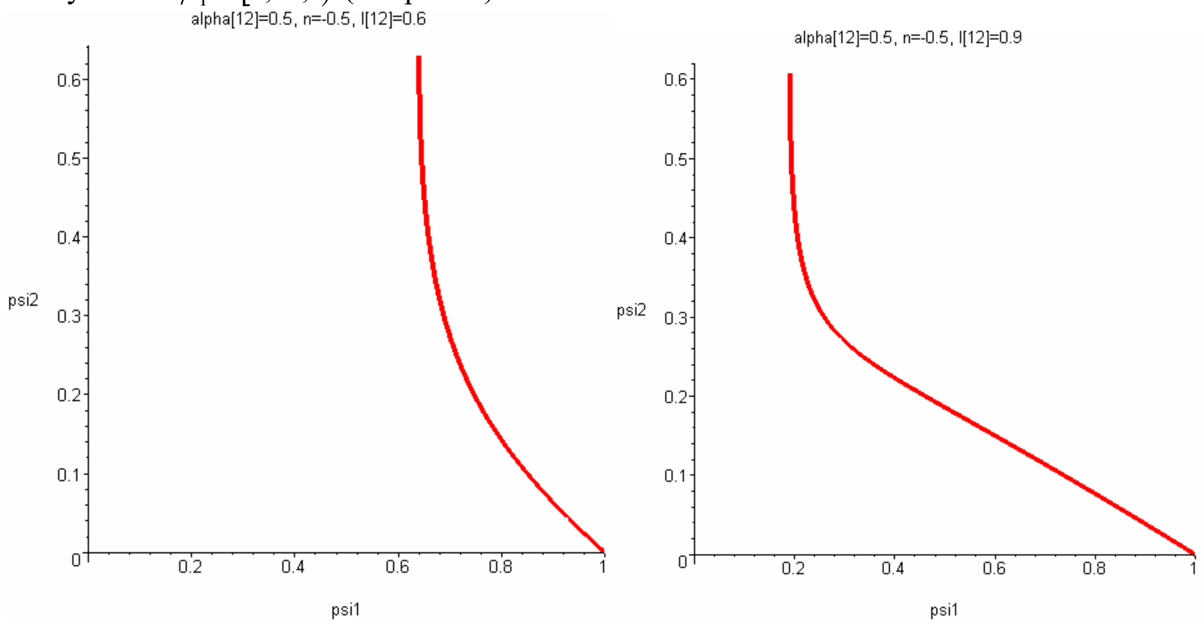
Основная часть

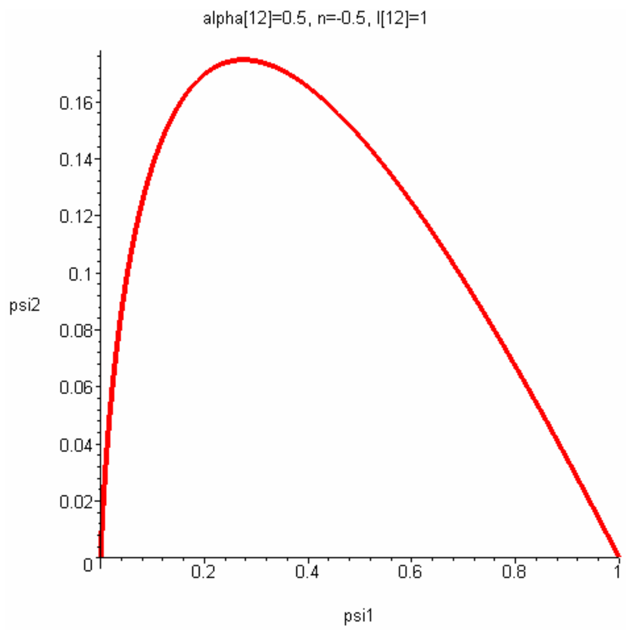
Определим математически допустимые пределы изменения параметров α_{12}, I_{12}, n, которые входят в критериальное соотношение (1).

За определением $\psi_1 \in [0;1]$, при двухэтапной деформации: $\psi_1 \in [0;1)$. Учитывая, что функция определена в области вещественных чисел, если знаменатель не превращается в нуль и основа степенной функции больше нуля, делаем вывод, что для критериального соотношения (1), параметр n не равняется нулю, а также $\alpha_{12} > 0$. Следовательно, ограничения, которые налагаются на переменную ψ_1, параметры n и α_{12} выражаются с помощью системы неравенств:

$$\begin{cases} n \neq 0 \\ 0 \leq \psi_1 \leq 1. \\ \alpha_{12} \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

При числовом исследовании соотношения (1) с параметрами, которые удовлетворяют неравенства (2) были обнаружены участки, когда функция $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$ в области вещественных чисел не определенна. Так при значениях параметров $\alpha_{12} = 0{,}5$; n = -0,5; $I_{12} = 0{,}6$ функция определена на промежутке $\psi_1 \in [0{,}64;1)$. При увеличении значения параметра I_{12} до 0,9 область определения функции увеличивается и определяется промежутком $\psi_1 \in [0{,}19;1)$ (см. рис. 1).





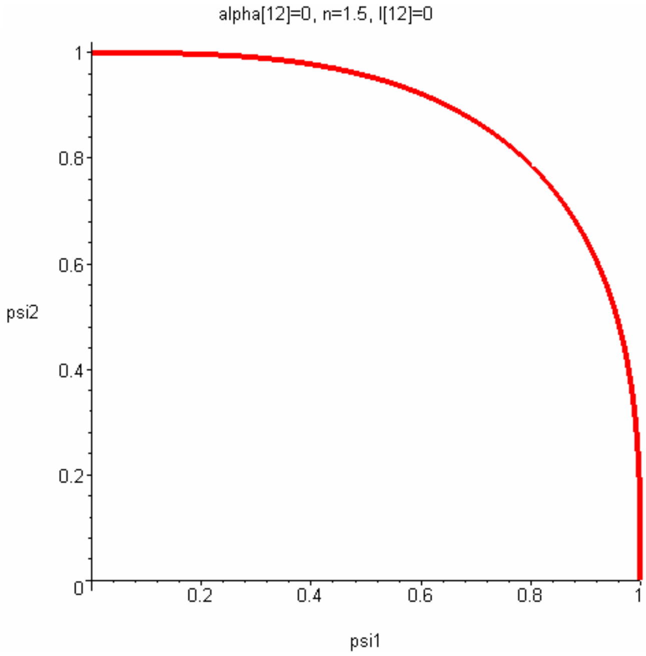


Рис. 1. Графики зависимостей между ресурсами пластичности при двухэтапной деформации, когда α_{12} = 0,5; n = -0,5; I_{12} = 0,6; I_{12} = 0,9; I_{12} = 1; I_{12} = 0.

Выходя из полученных результатов числового исследования критериального соотношения (1), можно сделать вывод, что ограничений параметров (2) не достаточно. Для нахождения дополнительных ограничений параметров математической модели необходимо ее аналитически исследовать.

В первую очередь необходимо исследовать выражение:

$$\sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1}\,. \tag{3}$$

Из определения квадратного корня, подкоренное выражение должно быть не меньше нуля, чтобы значение выражения приобретало действительных значений. То есть:

$$\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1 \geq 0\,. \tag{4}$$

Откуда

$$I_{12}^2 \geq 1 - \frac{1}{\psi_1^{2\cdot n}}\,. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда $n > 0$. Тогда при $0 \leq \psi_1 \leq 1$ правая часть неравенства (5) лежит в границах $-\infty < 1 - \frac{1}{\psi_1^{2\cdot n}} \leq 0$, то есть является числом не положительным. I_{12}^2 – число не отрицательное, следовательно, неравенство (5) при $n > 0$ выполняется для $\forall I_{12} \in \left(-\infty;\infty\right)$. Потому при $n > 0$ никакие дополнительные ограничения на параметры не налагаются.

Рассмотрим неравенство (5) при $n < 0$. Тогда при изменении ψ_1 от 0 до 1 выражение $1 - \frac{1}{\psi_1^{2\cdot n}}$ монотонно спадает от 1 до 0. То есть для выполнения неравенства (5) необходимо, чтобы $\left|I_{12}\right| \geq 1$. Если $\left|I_{12}\right| < 1$, то всегда для $\psi_1 \in \left[0;1\right)$ на графике функции $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$ будет наблюдаться область, при которой функция неопределенна. Согласно с неравенством (5) область определения функции $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$ определяется неравенством:

$$\sqrt[2n]{\frac{1}{1-I_{12}^2}} \le \psi_1 \le 1\,. \tag{6}$$

Область, которая определяется неравенством (6) полностью совпадает со значениями ψ_1 на рис. 1, для которых ψ_{*2}, что вычисляется за критериальным соотношением (1), лежит в области вещественных чисел.

Теперь аналитически исследуем выражение модели, которое возвышается к степени $1/n$. Это выражение должно быть не меньше нуля. То есть

$$\psi_1^n \cdot \left(\alpha_{12}^n - I_{12}\right) + \sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1} \ge 0\,. \tag{7}$$

Из выражения (7) получим иррациональное неравенство:

$$\sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1} \ge \psi_1^n \cdot \left(I_{12} - \alpha_{12}^n\right). \tag{8}$$

Иррациональное неравенство (8) раскладывается на совокупность систем неравенств, которые имеют вид:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \psi_1^{2\cdot n}\left(I_{12} - 1\right) + 1 \ge 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n \ge 0 \qquad\qquad ;(9) \\ I_{12} \ge \dfrac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^{2n} - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} \end{cases} \\ \begin{cases} \psi_1^{2\cdot n}\left(I_{12} - 1\right) + 1 \ge 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n < 0 \end{cases} \quad .(10) \end{array}\right. \tag{11}$$

Если бы в системе неравенств (9) не было третьего неравенства, то совокупность систем неравенств (11) имела бы решение, которое совпадало бы с решением первого неравенства (9) и (10) систем. Это объясняется тем, что второе неравенство системы (9) и второе неравенство системы (10) дополняют друг друга, то есть в совокупности не создают ограничений ни на один параметр. Определим, налагает ли третье неравенство системы (9) новые ограничения на параметры α_{12}, I_{12}, n, если выполняются два предыдущих неравенства.

Выходя из проведенных выше исследований, первое неравенство системы неравенств (9) будет выполняться при $n > 0$ или при $n < 0$ и $\left|I_{12}\right| \ge 1$.

Исследуем сначала систему неравенств

$$\begin{cases} I_{12} \ge \alpha_{12}^n \\ I_{12} \ge \dfrac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n}, \end{cases} \tag{12}$$

при $n > 0$.

Обозначим правую часть второго неравенства системы (12)

$$f(\psi_1) = \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n}\,. \tag{13}$$

Исследуем, как себя поведет $f(\psi_1)$ при изменении ψ_1 от 0 до 1. Определим существуют ли на этом промежутке экстремумы функции:

$$\left(\frac{\psi_1^{2n}+\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^{n}-1}{2\cdot\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^{n}}\right)' = \frac{n}{\alpha_{12}^{n}\cdot\psi_1^{2\cdot n+1}} > 0. \qquad (14)$$

Следовательно, экстремумов при $\psi_1 \in [0;1)$ нет, функция является монотонно растущей, потому максимальное значение достигает при $\psi_1 = 1$:

$$f_{\max} = f(1) = \frac{\alpha_{12}^{n}}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha_{12} > 0$

$$\alpha_{12}^{n} > \frac{\alpha_{12}^{n}}{2},$$

а это значит, что при условии выполнения первого неравенства системы (12), автоматически выполняется и второе неравенство, то есть при $n > 0$ второе неравенство не налагает дополнительных ограничений ни на один из параметров.

Исследуем систему неравенств (12) при $n < 0$ и $|I_{12}| \geq 1$. Ввиду выражения (14), функция $f(\psi_1)$ является монотонно убывающей, а, следовательно, достигает своего максимального значения при $\psi_1 = 0$:

$$f_{\max} = \lim_{\psi_1 \to 0} \frac{\psi_1^{2n}+\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^{n}-1}{2\cdot\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^{n}} = \frac{\alpha_{12}^{n}}{2}.$$

Ввиду предыдущих исследований, делаем вывод, что и при $n < 0$; $|I_{12}| \geq 1$ никаких дополнительных ограничений параметров критериального соотношения (1) второе неравенство системы (12) не создает.

Анализ результатов, которые получены из неравенства (4) и совокупности систем неравенств (11), позволяет сделать обобщение, что математически допустимые значения параметров критериального соотношения (1) определяются совокупностью:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_{12} > 0; \\ n > 0; \\ -\infty < I_{12} < +\infty; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_{12} > 0; \\ n < 0; \\ |I_{12}| > 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (15)$$

Соответствующее обобщение полностью согласовывается с результатами численного исследования соответствующего критериального соотношения (см. рис. 1).

Вывод

Закономерности в изменении остаточного ресурса и получении ограничения (15) на изменение параметров критериального соотношения (1) позволит упростить диагностику материала при двухэтапном деформировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень /Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 - 195 с.

2. Лебедев А.А., Михалевич В.М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. - 2003. - № 3. - С. 101-112.

3. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении. – К.: УМК ВО, 1989. – 152 с.

4. Сивак И. О. Влияние немонотонности нагружения на пластичность при радиальном выдавливании с контурной осадкой // Науковий вісник Національної гірничої академії України. – 2001. –№ 7 – С. 47 – 50.

Михалевич Владимир Маркусович – заведующий кафедры прикладной математики, г. Винница, ул. Квятека 15/9, тел. 46-23-50;

Краевский Владимир Александрович – старший преподаватель кафедрой прикладной математики, г. Винница, ул. Воинов Интернационалистов 3, кв. 216, тел. 65-58-82;

Добранюк Юрий Владимирович – магистрант гр. ТАМмн-07, г. Винница, ул. Воинов нтернационалистов 5/505.

Винницкий национальный технический университет.