

П. Д. Черняк

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПОЛОС ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В статье приведен алгоритм расчета плоской задачи теории упругости методом конечных полос, показаны его особенности и преимущества. Выполнен анализ результатов в сравнении с результатами полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: конечная полоса, метод конечных полос, метод конечных элементов, плоское напряженное состояние.

Актуальность задачи исследования

Для решения некоторых задач теории упругости, объектом исследования которых являются конструкции с постоянными физико-геометрическими характеристиками и простыми граничными условиями, наиболее эффективным является метод конечных полос (МКП). Особенно в задачах, где один размер намного больше другого. В таких задачах можно ввести некоторые упрощения, используя общие аппроксимирующие функции. Использование аппроксимирующих функций является общим как для метода конечных элементов (МКЭ), так и для МКП, с тем отличием, что по МКП в продольном направлении решают континуальную задачу с использованием только тригонометрических функций, без дискретизации на простые функции. В поперечном направлении решают дискретную задачу, образуемую путем разбиения на конечные полосы, которые разделены узловыми линиями, работа которых описывается линейными функциями формы по аналогии к МКЭ (рис. 1 а).

Подробный библиографический обзор развития МКП проведен в статье [3]. МКП достаточно подробно изложен в монографиях [1, 2].

Целью статьи является исследование сходимости плоской задачи теории упругости на примере расчета консольной пластинки методом конечных полос.

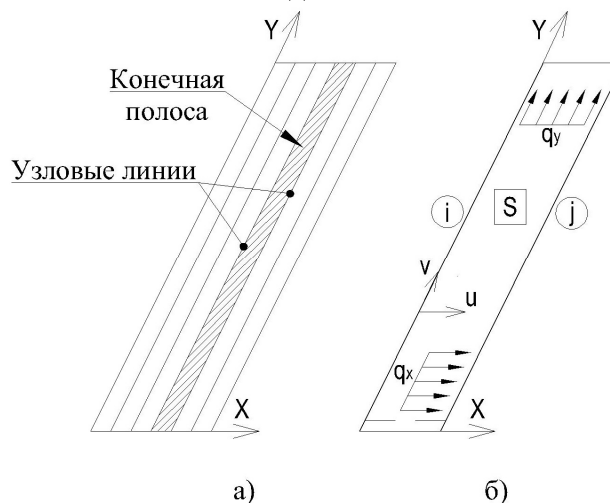


Рис. 1. Метод конечных полос: а) конечно – элементная модель; б) конечная полоса

Изложение основного материала

Рассматривают изотропную, тонкую, с постоянной толщиной пластину на один из концов которой наложены вязи, запрещающие любые перемещения в плоскости x и y , другой же конец перемещается свободно. Нагрузка принята в виде равномерно-распределенной на

единицу объема материала, действующая в соответствующем направлении вектора перемещений – $0Y$. Напряженно-деформированное состояние пластины описывают плоской задачей теории упругости и находят с помощью МКП в перемещениях, то есть используют эквивалентный принцип минимума потенциальной энергии, который выражается через поле возможных перемещений заданной формы.

Рассмотрим конечную полосу S , поведение которой описывают перемещением узловых линий i и j (рис. 1 б).

Компоненты перемещений u , v конечной полосы S аппроксимируем функциями в виде [1]:

$$\begin{aligned} u &= \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y_m(y) \\ v &= \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y'_m(y) \frac{L}{\mu_m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где r – количество слагаемых членов ряда; L – длина конечной полосы, b – ширина конечной полосы, i , j – соответственно индексы узловых линий $\mu_m = m\pi$.

$$Y_m(y) = \sum_{m=1}^r \left[1 - \cos\left(\frac{(m-0.5)\pi y}{L}\right) \right]. \quad (2)$$

Следует отметить, что за счет выбора функций формы обеспечивают условия закрепления на концах и условия непрерывности на границах конечной полосы.

Функции (1) подаем в виде:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\}, \quad (3)$$

где $[N]$ – матрица функций форм; $\{d\}$ – вектор перемещений.

В случае плоского напряженного состояния, вектор деформаций можно записать через вектор перемещений в виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = [B] \{d\}, \quad (4)$$

где $[B]$ – матрица производных от функций форм.

Физические характеристики пластины учитывают с помощью матрицы упругости $[D]$ размером 3×3 и выражают через модуль Юнга – E и коэффициент Пуассона – ν :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{где } D_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_{xy} = \frac{E\nu}{2(1+\nu)} \quad D_1 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}.$$

Тогда вектор напряжений имеет следующий вид:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{d\}. \quad (6)$$

Матрица жесткости конечного элемента $[k]^e$ имеет вид:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для изотропной пластины постоянной толщины на основе вариационного принципа, учитывая соотношение $[B_i]$ и $[B_j]$, матрица имеет следующий вид [5]:

$$k_{ij} = t \int_A [B_i]^T [D] [B_j] dA, \quad (8)$$

где i, j – индексы компонент перемещений в направлении x и y соответственно.

Выполнив преобразования (1) – (5), можно записать матрицу жесткости в явном виде:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & -\frac{D_1 I_3 + D_{xy} I_4}{2} & -\frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & -\frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} & \frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 6D_{xy} I_8}{6b} \\ \frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} & \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ -\frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 - 6D_{xy} I_8}{6b} & \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $I_1 = t \int_0^l Y_{mu} Y_{nu} dy$; $I_2 = t \int_0^l Y'_{mu} Y'_{nu} dy$; $I_3 = t \int_0^l Y_{mu} Y'_{nv} dy$; $I_4 = t \int_0^l Y'_{mu} Y_{nv} dy$; $I_5 = t \int_0^l Y'_{mv} Y_{nu} dy$;
 $I_6 = t \int_0^l Y_{mv} Y'_{nu} dy$; $I_7 = t \int_0^l Y'_{mv} Y'_{nv} dy$; $I_8 = t \int_0^l Y_{mv} Y_{nv} dy$.

Учитывая свойства ортогональности, для случая шарнирно закрепленной полосы на концах при $m \neq n$ получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^l Y''_m Y''_n dy &= 0 \end{aligned}. \quad (10)$$

Вектор эквивалентных сил, сосредоточенных в узлах конечной полосы $\{F\}^e$, имеет следующий вид [5]:

$$\{f\}^e = [N]^T \{q\}, \quad (11)$$

где $[q]$ – вектор объемных сил.

Для плоского напряженного состояния, учитывая линейное распределение перемещения в поперечном направлении, вектор эквивалентных сил в случае действия равномерно распределенной нагрузки имеет следующий вид:

$$\{f_q\}^e = \frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{c} l \\ q_x \int_0^m Y dy \\ \mu_m 0 \\ q_y \frac{l}{m} \int_0^m Y' dy \\ l \\ q_x \int_0^m Y dy \\ \mu_m 0 \\ q_y \frac{l}{m} \int_0^m Y' dy \end{array} \right\}, \quad (12)$$

где q_x и q_y – компоненты вектора нагрузки соответственно в направлении x и y .

На основании вариационного принципа возможных перемещений Лагранжа по аналогии к методу конечных элементов [5] основное уравнение имеет следующий вид:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad [K] = \sum_e [k]^e \quad \{F\} = \sum_e \{f\}^e, \quad (13)$$

где $[K], \{F\}$ – матрица жесткости и вектор эквивалентных нагрузок, полученные в результате ансамблирования.

Пример расчета плоской задачи теории упругости методом конечных полос

Объектом исследования является тонкая пластинка размерами $t = 1$ мм, $b = 10$ мм и $L = 200$ мм. Нагрузка $q = 0.01$ Н / мм² равномерно распределена по площади пластины. Пластина изотропная, модуль Юнга $E = 206000$ Н / мм² и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

При решении задачи методом конечных элементов использованы двумерные четырехузловые элементы – CPLSTN4 библиотеки программного комплекса Femap with NX Nastran [4]. В качестве эталона принята модель пластины с разбиением на 40 элементов в поперечном направлении и на 800 элементов в другом.

В табл. 1 приведены максимальные перемещения консольной пластины длиной $L = 200$ мм, при ее разбивке на 1, 3, 6 и 10 конечных полос соответственно, а также при разном количестве наложенных слагаемых (полуволн).

Распределение перемещений по длине пластины на расстоянии $L = 50, 100, 150$ и 200 мм от начала координат отражено на рис. 2.

Таблица 1

Максимальные перемещения свободного конца прямоугольной пластины ($L=200$ мм) f_{\max}

Количество слагаемых членов ряда, r	МКП				МКЭ	
	f_{\max}^1	f_{\max}^3	f_{\max}^6	f_{\max}^{10}	1 элем.	40x800 элем.
1	1.014	1.028	1.029	1.029	1.0627	1.061
3	1.060	1.076	1.078	1.078		
6	1.062	1.078	1.080	1.103		
10	1.063	1.078	1.080	1.107		

В таблице 2 выполнено сравнение распределения максимальных напряжений σ_y по длине пластины с координатами $L = 50, 100, 150$ и 200 мм и $b = 0$. Напряжения получены в результате расчета по МКЭ эталонной модели (40x800), а также с использованием МКП

(количество слагаемых членов ряда соответственно 1, 3, 6 и 10). Показана относительная погрешность расчета 1-й полосы по МКП в сравнении с эталонной моделью.

Таблица 2

Распределение напряжения σ_y (МПа)

		$L=50$	$L=100$	$L=150$	$L=200$
МКЭ	σ_y	114.3	62.3	27.7	6.9
МКП ($r=1$)	σ_y	70.7	65.3	50.0	27.1
	%	38	5	81	293
МКП ($r=3$)	σ_y	103.7	72.7	26.7	9.1
	%	9	17	4	32
МКП ($r=6$)	σ_y	111.9	66.0	30.1	8.2
	%	2	6	9	19
МКП ($r=10$)	σ_y	114.2	67.3	29.4	6.9
	%	0	8	6	0

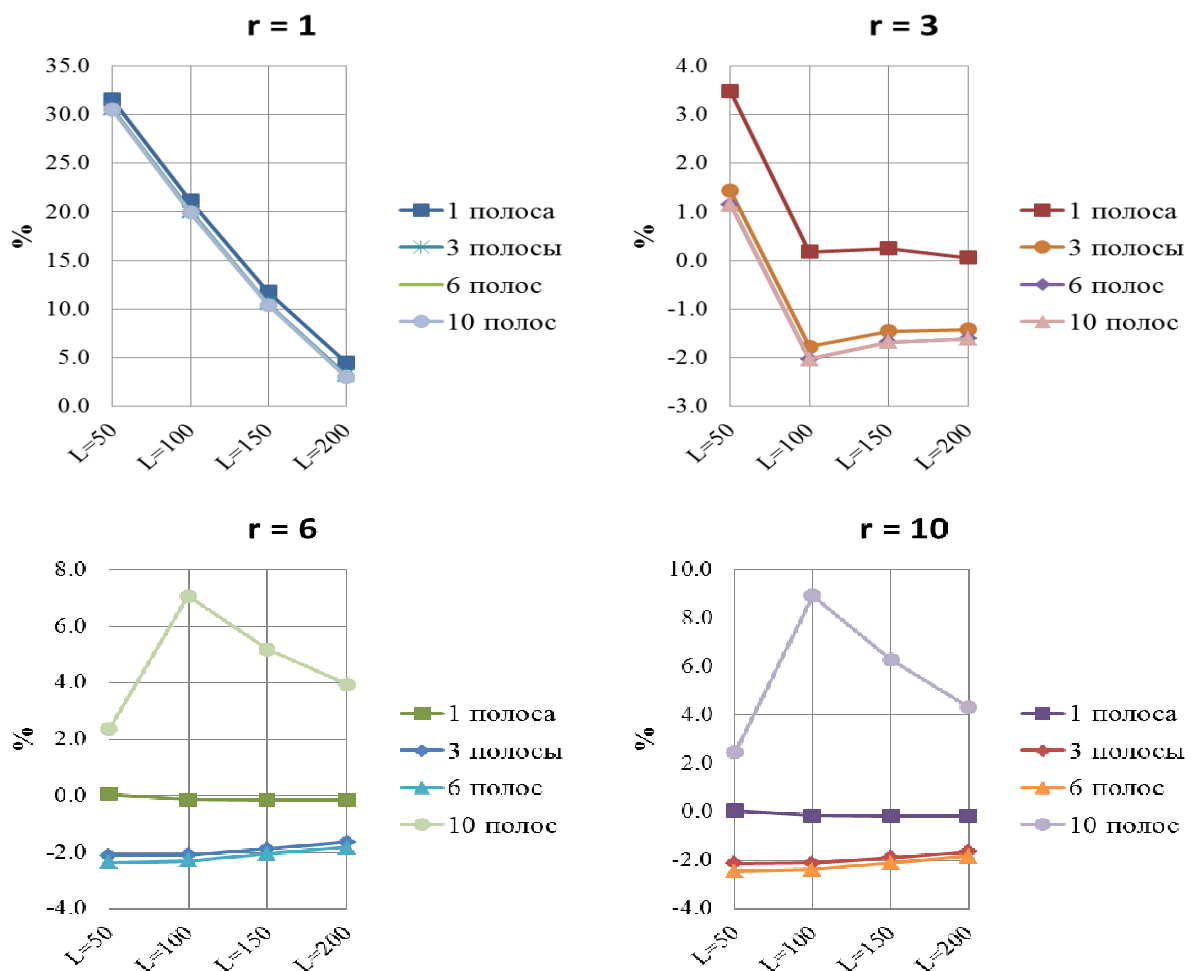


Рис. 2. Относительная погрешность распределения перемещений по длине пластины по МКП в сравнении с МКЭ

Выводы

Выполнив анализ численных данных, полученных в результате расчета по методу конечных полос консольной пластинки с простыми граничными условиями, можно сделать

вывод, что этот метод позволяет получить приближенные решения в пределах допустимых погрешностей, при заданных простых граничных условиях конечная полоса с достаточной точностью описывает работу моделируемой пластинки.

При анализе максимальных перемещений свободного конца пластины (табл. 1), можно получить допустимый результат $f^1 = 1.062$ по сравнению с МКЭ $f = 1.061$, моделируя пластинку одной полосой и просуммировав лишь 6 слагаемых членов ряда (рис. 2). Распределение напряжения по длине пластинки с максимальной относительной погрешностью 8 % по сравнению с МКЭ получено при количестве членов ряда $r = 10$.

Следует отметить, что МКП наиболее эффективен для расчета отдельных конструкций, имеющих постоянные физико-геометрические характеристики и простые граничные условия в соответствующих направлениях сечения. В этих условиях появляется возможность упрощения расчетной системы уравнений на набор подсистем меньшего порядка, каждый из которых соответствует своему компоненту ряда Фурье в продольном направлении. Выполнив дискретизацию задачи только в одном направлении, другой описывают неразрывной тригонометрической функцией, что позволяет значительно оптимизировать процесс решения поставленной задачи. Указанное упрощение сокращает размерность задачи на единицу и ведет к существенным упрощениям при построении расчетных алгоритмов. Соответственно и на порядок уменьшается количество неизвестных, сокращается размер и ширина ряда матрицы коэффициентов расчетной системы линейных алгебраических уравнений, уменьшается количество исходных данных. Указанная особенность МКП является его основным преимуществом.

К недостаткам МКП можно отнести его специфику использования, поскольку наиболее результативно данный метод может быть применен к задачам, объекты исследования которых имеют постоянные геометрические и физические характеристики вдоль одной из координат конструкций, в частности при расчете мостовых, туннельных и других конструкций с пластин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cheung Y. K. Finite Strip Method in Structural Analysis / Cheung Y. K. – Oxford. : Pergamon Press, 1976. – 233 p.
2. Cheung Y. K. The Finite Strip Method / Y. K. Cheung, L. G. Tham. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
3. Friedrich R. Finite strip method: 30 years A bibliography (1968-1998) / R. Friedrich // Int. J. for Computer-Aided Engineering. – 2000. – № 17. 1. – P. 92 – 111.
4. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / Рудаков К. Н. – К. : НТУУ "КПИ", 2011. – 317 с.
5. Зинкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

Черняк Павел Дмитриевич – аспирант кафедры мостов и строительной механики.

Национальный университет «Львовская политехника».