

УДК 62-838

**А. Б. Мокин, д. т. н., проф.; Б. И. Мокин, д. т. н., проф., акад. НАПН Украины;
В. А. Лобатюк**

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИБРИДНОГО АВТОМОБИЛЯ С НЕРАБОТАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

Решена задача оптимизации движения транспортного средства с комбинированным приводом от двигателя внутреннего сгорания и от электрического двигателя постоянного тока дорогой, которая, кроме горизонтальных участков, содержит спуски и подъемы, а движение осуществляется при условии, что система электропривода отключена.

Ключевые слова: оптимизация движения, гибридный автомобиль, двигатель внутреннего сгорания, двигатель постоянного тока.

Исходные предпосылки и постановка задачи

В работе [1] нами осуществлена трансформация математических моделей транспортных средств с комбинированным приводом от двигателя внутреннего сгорания и от электрического двигателя постоянного тока к задаче оптимизации их движения по дороге, которая, кроме горизонтальных участков, содержит спуски и подъемы, выбраны критерии оптимизации и ограничения, а также предложена схема декомпозиции задачи для случаев, когда один из приводов по какой-то причине не работает и когда они создают тяговое усилие на валу одновременно.

В данной работе мы покажем, как решают эту задачу оптимизации, когда из-за разряда аккумуляторной батареи или из-за неисправности в электрической системе гибридного автомобиля выключен его электропривод и автомобиль движется только с помощью двигателя внутреннего сгорания.

В этом случае, как показано в работе [1], математическая модель динамики автомобиля будет иметь вид:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0 - f_1 v - f_2 v^2 \quad (1)$$

– в случае, если автомобиль движется горизонтальным участком дороги;

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2 \quad (2)$$

– в случае, если автомобиль движется на спуск;

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2 \quad (3)$$

– в случае, если автомобиль движется на подъем.

В качестве критерия оптимизации будем иметь функционал

$$e_q = \int_0^{\tau_q} q d\tau, \quad (4)$$

а в качестве изопериметрического ограничения имеем функционал

$$l_q = \int_0^{\tau_q} v d\tau. \quad (5)$$

Заметим, что в выражениях (1) - (5) v, τ, q, e_q, l_q соответственно – относительная скорость движения автомобиля, относительное время, относительные расходы топлива, относительные затраты энергии и относительный путь; $f_0, f_0^*, f_1, f_2, \tau_q$ – относительные параметры, а β – угол наклона полотна дороги к горизонтальной плоскости – все эти относительные величины определены через соответствующие именованные единицы в работе [1], ознакомление с которой обязательно перед ознакомлением с результатами, полученными в данной статье, поэтому на их определении в данной статье мы останавливаться не будем.

А в этой статье мы синтезируем зависимости $v(\tau), q(\tau)$, которые доставляют минимум критерию (4), удовлетворяя одновременно ограничение (5) и одному из ограничений (1), (2) или (3), то есть синтезируем законы оптимального движения гибридного автомобиля, когда он движется только с помощью двигателя внутреннего сгорания при отключенной системе электропривода. Эта задача в работе [1] определена первой в предложенном декомпозиционном множестве.

Решение поставленной задачи

Поставленную задачу решим сначала для случая, когда гибридный автомобиль движется по дороге, проложенной на горизонтальной плоскости.

Решение начнем с определения функции Лагранжа, которая в соответствии с рекомендациями, приведенными, например, в работах [2], [3], для нашей оптимизационной задачи будет иметь вид:

$$H^{(q)}(v, v', q, q', \psi, \psi', \tau) = q + \lambda_1 \left(v' - \frac{q}{v} + f_0 + f_1 v + f_2 v^2 \right) + \lambda_2 (\psi' - v). \quad (6)$$

Как видим, составляющими функции Лагранжа является подинтегральное выражение q критерия оптимизации (4), уравнения динамики (1), умноженное на неопределенный множитель Лагранжа λ_1 и умноженное на неопределенный множитель Лагранжа λ_2 уравнение, которое получим из функционала (5), отпустив верхнюю границу, введя новый символ ψ для обозначения этого функционала после отпущения его верхней границы и продифференцировав этот функционал.

Как известно из теории вариационного исчисления [2], [3], для того чтобы зависимости $v(\tau), q(\tau)$ доставляли минимум критерию (4), они должны быть найдены путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} H_v^{(q)} - \frac{d}{d\tau} H_{v'}^{(q)} = 0, \\ H_q^{(q)} - \frac{d}{d\tau} H_{q'}^{(q)} = 0, \\ H_\psi^{(q)} - \frac{d}{d\tau} H_{\psi'}^{(q)} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где:

$$\begin{aligned} H_v^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial v}, H_{v'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial v'}, \\ H_q^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial q}, H_{q'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial q'}, \\ H_\psi^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \psi}, H_{\psi'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \psi'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя частные производные (8), взятые от выражения (6), в систему уравнений (7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \left(\frac{q}{v^2} + f_1 + 2f_2 v \right) - \lambda_2 - \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \\ 1 - \frac{\lambda_1}{v} = 0, \\ -\frac{d\lambda_2}{d\tau} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из третьего уравнения системы (9) имеем –

$$\lambda_2 = -C_2, \quad (10)$$

где C_2 – неизвестная константа.

Из второго уравнения системы (9) имеем –

$$\lambda_1 = v. \quad (11)$$

Подставляя выражения (10), (11) в первое уравнение системы (9), получим уравнение –

$$v \left(\frac{q}{v^2} + f_1 + 2f_2 v \right) + C_2 - \frac{dv}{d\tau} = 0, \quad (12)$$

которое легко привести к виду, пригодному для интегрирования –

$$\frac{v}{2f_2 v^3 + f_1 v^2 + C_2 v + q} dv = d\tau, \quad (13)$$

или

$$\varphi(v) dv = d\tau, \quad (14)$$

где

$$\varphi(v) = \frac{v}{2f_2 v^3 + f_1 v^2 + C_2 v + q}. \quad (15)$$

Интегрируя выражение (14), будем иметь –

$$\int \varphi(v) dv = \tau + C_1, \quad (16)$$

где C_1 – неизвестная константа.

Полученный интеграл (16) точного аналитического выражения не имеет, поэтому возьмем его приближенно, воспользовавшись разложением функции (15) в степенной ряд Тейлора в окрестности точки $v = 0$, из которого (чтобы учесть нелинейный характер этой функции) используем первые три члена, то есть представим эту функцию в виде –

$$\varphi(v) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)v + \frac{\varphi''(0)}{2}v^2. \quad (17)$$

Поскольку $\varphi(0) = 0$, выражение (17) упрощаем к выражению –

$$\varphi(v) \approx \varphi'(0)v + \frac{\varphi''(0)}{2}v^2, \quad (18)$$

или (с учетом значений первой и второй производных от функции (15) в нуле) к выражению –

$$\varphi(v) \approx \frac{1}{q}v - \frac{C_2}{q^2}v^2. \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) в (16) и вычисляя интегралы от степенных функций, получим –

$$\frac{1}{2q}v^2 - \frac{C_2}{3q^2}v^3 = \tau + C_1, \quad (20)$$

или –

$$v^3 - \frac{3q}{2C_2}v^2 + \frac{3q^2}{C_2}(\tau + C_1) = 0. \quad (21)$$

Это уравнение заменой

$$y = v - \frac{q}{2C_2} \quad (22)$$

приводят к виду –

$$y^3 + 3py + 2a = 0, \quad (23)$$

где:

$$\begin{aligned} 3p &= -\frac{3q^2}{4C_2^2}, \\ 2a &= -\frac{q^3}{4C_2^3} + \frac{3q^2}{C_2}(\tau + C_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (23), как показано в работе [4], относят к классу тех уравнений, действительный положительный корень которых находят из выражения –

$$y_+ = (-a + (a^2 + p^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + (-a - (a^2 + p^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

Подставляя выражение (24) в (25), а результат этой подстановки в выражение (22), получим –

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{q^3}{8C_2^3} - \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) + \left(\left(-\frac{q^3}{8C_2^3} + \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) \right)^2 + \left(-\frac{q^2}{4C_2^2} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \\ &+ \left(\frac{q^3}{8C_2^3} - \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) - \left(\left(-\frac{q^3}{8C_2^3} + \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) \right)^2 + \left(-\frac{q^2}{4C_2^2} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{q}{2C_2}, \end{aligned} \quad (26)$$

это и будет математическая модель скорости движения гибридного автомобиля с выключенной системой электропривода, оптимальная по критерию (4) минимума расхода топлива двигателя внутреннего сгорания.

Эту модель в общем виде можно представить и так –

$$v = F_v(q, C_1, C_2, \tau), \quad (27)$$

помня, что расход топлива q необходимо подставлять, исходя из уравнения (1) динамики движения автомобиля, то есть в виде –

$$q = v \frac{dv}{d\tau} + f_0 v + f_1 v^2 + f_2 v^3. \quad (28)$$

В свою очередь, выражение (28) в общем виде может быть представлено как –

$$q = F_q(v, v', \tau). \quad (29)$$

Подставляя выражение (29) в выражение (27), получим –

$$v = F_v(F_q(v, v', \tau), C_1, C_2, \tau). \quad (30)$$

Выражение (30), параметрическое по τ , представляет собой параметрическое уравнение с одним неизвестным v , для решения которого необходимо предварительно определить константы C_1, C_2 . Для этого необходимо, воспользовавшись левым (л) и правым (п) граничными условиями –

$$\begin{aligned} v|_{\tau=0} &= v_l, \\ v|_{\tau=\tau_q} &= v_n \end{aligned} \quad (31)$$

и выражением (30), составить два уравнения:

$$v_l = F_v(F_q(v_l, v'_l, 0), C_1, C_2, 0), \quad (32)$$

$$v_n = F_v(F_q(v_n, v'_n, \tau_q), C_1, C_2, \tau_q), \quad (33)$$

решив которые относительно C_1, C_2 , найдем числовые значения C_1^*, C_2^* этих констант. Подставляя эти числовые значения в выражение (30), получим параметрическое уравнение –

$$v = F_v(F_q(v, v', \tau), C_1^*, C_2^*, \tau), \quad (34)$$

которое представляет собой математическую модель оптимальной скорости движения гибридного автомобиля при выключенной системе электропривода в течение времени τ_q во время его движения за счет только двигателя внутреннего сгорания в пределах от левой до правой границы горизонтального участка дороги.

И в силу того, что выражение (34) представляет собой математическую модель оптимальной скорости движения гибридного автомобиля, то и производное от него выражение (29) будет представлять собой математическую модель оптимального расхода топлива в двигателе внутреннего сгорания этого автомобиля во время его движения горизонтальным участком дороги.

А теперь выясним, что изменится, если гибридный автомобиль при этих же условиях будет двигаться на спуск или на подъем.

Сначала обращаем внимание на то, что в уравнениях (1), (2), (3) динамики движения автомобиля, когда этот автомобиль движется горизонтальным участком, имеет место параметр f_0 , а в случае движения на спуск или на подъем имеют место параметры $f_0 \cos \beta, f_0^* \sin \beta$ с соответствующими знаками. А после этого обращаем внимание, что в уравнении (12), из которого мы получили математическую модель (26) оптимальной скорости движения автомобиля горизонтальным участком дороги, параметр f_0 в явном виде отсутствует. А это значит, что в явном виде будут отсутствовать в уравнении из которого мы будем получать математические модели оптимальной скорости движения автомобиля на

спуск и на подъем, и параметры $f_0 \cos \beta, f_0^* \sin \beta$, то есть структура математической модели оптимальной скорости движения автомобиля не зависит от того, движется он горизонтальным участком дороги, движется он на спуск или подъем. Но математическая модель оптимального расхода топлива в двигателе внутреннего сгорания, которая для движения горизонтальным участком дороги имела вид (28), для движения на спуск будет иметь вид –

$$q = v \frac{dv}{d\tau} - f_0^* v \sin \beta + f_0 v \cos \beta + f_1 v^2 + f_2 v^3, \quad (35)$$

что вытекает из уравнения (2), а для движения на подъем она будет иметь вид –

$$q = v \frac{dv}{d\tau} + f_0^* v \sin \beta + f_0 v \cos \beta + f_1 v^2 + f_2 v^3, \quad (36)$$

что вытекает из уравнения (3).

Из выражений (35), (36) видно, что специфика движения автомобиля (по горизонтали, на спуск или на подъем) в моделях расхода топлива учтена, и именно через эти модели, которые являются мультипликативными составляющими скоростных моделей, её учитывают и в математических моделях оптимальной скорости движения автомобиля. Материал, посвященный вычислительным методам реализации синтезированных моделей, а также посвященный учету вариаций отрезка времени τ_q , в течение которого автомобиль проезжает отрезок дороги длиной l_q , будет изложен нами в одной из следующих публикаций.

Выводы

1. Синтезированы математические модели оптимального движения гибридного автомобиля при отключенной системе электропривода во время его движения с помощью двигателя внутреннего сгорания отрезком дороги, проложенной на горизонтальной плоскости.

2. Показано, как трансформируются синтезированные модели к условиям движения гибридного автомобиля с помощью двигателя внутреннего сгорания на спуск и на подъем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Декомпозиція задач оптимізації руху транспортного засобу з комбінованим приводом [Електронний ресурс] / О. Б. Мокин, Б. І. Мокин, В. А. Лобатюк, О. П. Кубрак // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2015. – № 3. – Режим доступу до журн.: <http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/9/9>.
2. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров // Москва-Ленинград: Энергия, 1965. – 220 с.
3. Мокин Б. І. Теорія автоматичного керування, методологія та практика оптимізації / Б. І. Мокин, О. Б. Мокин // Вінниця: ВНТУ, 2013. – 210 с.
4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев // Москва: Наука, 1967. – 608 с.

Мокин Александр Борисович – д. т. н., проф., заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов (ВЭТЭС), e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокин Борис Иванович – акад. НАПН Украины, д. т. н., проф., профессор кафедры ВЭТЭС, e-mail: borys.mokin@gmail.com.

Лобатюк Виталий Анатолієвич – аспирант кафедры ВЭТЭС, e-mail: vitalik.htc@gmail.com.
Винницкий национальный технический университет.