УДК 004.942:[519.6+519.873]

Д. О. Топчий

THE THEORY OF PLAFALES: ЧЕТВЕРНАЯ РОЛЬ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ СЕРЕНДИПОВЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

В статье представлен обзор результатов конструирования моделей серендиповых конечных элементов на основе «the theory of plafales»: чёткий смысл четверной роли базисных функций серендиповых конечных элементов.

Ключевые слова: *серендипов конечный элемент, базисные функции, plafal (-es), информационная технология в МКЭ.*

Введение

История метода конечных элементов (МКЭ) берёт своё начало с идеи выдающегося математика Куранта, которую он опубликовал в 1943 году [1]. Изначально идея Куранта не заинтересовала исследователей, потому что её реализация требовала огромных объёмов вычислительной работы. После появления электронной вычислительной машины (ЭВМ) метод начали активно разрабатывать инженеры-исследователи. Именно они, а не математики сразу же оккупировали вычислительные машины с целью получить ответы на практические вопросы. Процедура Куранта стала новым шагом в вычислительной математике, хотя влияние метода конечных разностей (МКР) некоторое время оставалось [2] (до появления произвольной триангуляции Тернера). В 1954 году Аргирис [3] развил некоторые обобщения линейной теории конструкций и представил методы исследования дискретных конструкций сложных конфигураций в форме, удобной для использования ЭВМ. Годом позже он показал [4], что матричное уравнение системы как для метода напряжений, так и для метода перемещений может быть получено с помощью минимизации потенциальной энергии системы. Первое формальное изложение МКЭ вместе с методом жёсткостей для совокупности элементов принадлежит Тернеру, Клауфу, Мартину и Топпу [5, 6], которые при исследовании задач о плоском напряжённом состоянии использовали для описания свойств треугольного элемента уравнения классической теории упругости. Они применяли матричные методы для дискретных структур к непрерывным структурам благодаря разделению их на конечное число элементов. Термин «конечные элементы» первым ввёл Клауф [7] в 1960 году. Для аппроксимации функций двух аргументов можно использовать традиционный способ, то есть осуществить интерполяцию по Лагранжу (факторизация двух одномерных полиномов Лагранжа соответствующего степени) и получить лагранжевые конечные элементы (ЛКЭ) [8, 9]. Факторизация приводит к тому, что лагранжевые элементы имеют узлы в средине конечного элемента. Внутренние узлы увеличивают объём вычислений и не используются при ансамблировании конечных элементов. Эти недостатки отсутствуют в серендиповых конечных элементах (СКЭ). Первоначальная цель создания СКЭ – возможность преобразования произвольного четырёхугольника в квадрат и уменьшение объёма вычислений за счёт изъятия “лишних” внутренних узлов. Такой криволинейный элемент появился при расчётах сооружений в работе [10] и получил название «серендипов конечный элемент». Быстрое развитие и популяризация МКЭ объясняют профессиональной подготовкой пользователей. С другой стороны, некоторые считают (и не без оснований), что недостаток математических знаний у инженерно ориентированных специалистов был главной причиной появления и распространения в МКЭ ложных гипотез и неадекватных моделей. Наибольшее количество ошибок связано с конструированием функций формы (базисных функций) конечных элементов, в частности элементов серендиповой семьи. В качестве вычислительного шаблона квадрат с билинейной интерполяцией впервые был использован в 1964 году [11]. Этот элемент замечательно комбинируется с треугольным симплексом, создавая простую и эффективную сетку МКЭ. Как правило, квадраты эффективны в средине вычислительной области, а треугольники – в пограничной полосе. В реальных двухмерных и трёхмерных задачах границы вычислительной области, границы между элементами, а также границы раздела (в неоднородной среде) зачастую криволинейны [9, 11, 12]. Именно такой элемент исследовали в 1968 году [10] Эргатудис, Айронс и Зенкевич. Это был пример успешного применения изопараметрической техники, которая состоит [13] в выборе кусочно-полиномиальных функций для определения преобразования координат. Термин «изопараметрическая» означает, что для преобразования координат выбирают те же полиномы, которые интерполируют физическое поле, то есть базисные функции выполняют двойную роль. В 1968 году авторы [10] не учли, что роль базисных функций – тройная. Их используют в задачах локализации нагрузок на конечный элемент. Если внутренние узлы есть, преобразование может быть чувствительным к перемещению этих узлов. Возможно авторы [10] наблюдали эту особенность и именно поэтому отказались от внутреннего узла лагранжевой модели. В начале 80-х годов ХХ-го века, когда стало понятно, что роль матричной алгебры в МКЭ преувеличена, появились геометрические подходы [14], а также стохастические процедуры построения базисов [15, 16].

Анализ исследований

В основе работы лежат публикации [17 – 26].

Цель работы

Основная цель работы – обзор результатов конструирования моделей серендиповых конечных элементов на основе «the theory of plafales»: строгий смысл четверной роли базисных функций серендиповых конечных элементов и дальнейшее применение разработанных моделей (в качестве алгоритмической основы) для информационных технологий в МКЭ.

Актуальность работы

Существует возможность создания универсальных программно-аппаратных комплексов (ПАК) как практических реализаций информационных технологий в МКЭ с компонентом искусственного интеллекта для конструирования функций формы (базисных функций) в автоматическом режиме.

Основная часть

Серендиповы модели являются примером одновременной интерполяции и аппроксимации: они интерполируют функцию на границе элемента и аппроксимируют внутри его. Главный недостаток стандартных базисов СКЭ [8 – 11, 27 – 30] – противоестественное поузловое распределение нагрузки от единичной массовой силы: в угловых узлах нагрузки отрицательные (парадокс Зенкевича) [9]. Роль стандартных функций формы (базисов Зенкевича) – двойная: их используют в изопараметрической технике. В стандартной модели отсутствуют дополнительные степени свободы, потому что она построена по “жёстким” [31] рецептам матричной алгебры в рамках интерполяционной гипотезы Лагранжа. Количество дополнительных мономов в интерполянте СКЭ зависит от порядка базиса соответствующего ЛКЭ. Первые альтернативные модели СКЭ появились в 1982 году [15, 16] в связи с невозможностью найти рациональное объяснение противоестественного поузлового распределения равномерной массовой силы. Сегодня существует несколько методов построения альтернативных моделей [32]. СКЭ с отрицательными нагрузками в узлах непригодны для компьютерного тестирования. Появление альтернативных серендиповых моделей, реализующих адекватное распределение равномерной массовой силы, связана с разработкой А. Н. Хомченко вероятностно-геометрического метода конструирования базисных функций [15, 16, 33 – 40]. Фактически А. Н. Хомченко положил начало и его последователи развили конструктивную (в духе Бернштейна [41]) теорию серендиповых аппроксимаций, результаты которой конструктивно доказывают, что роль базисных функций СКЭ – тройная.

Четверная роль базисов СКЭ

В работах [17 – 22] была поставлена ключевая цель – конструктивно доказать, что роль базисных функций СКЭ – четверная. Характеристика четвёртой роли – t (время). A priori, известные в МКЭ программные комплексы (ПК), например Nastran, Штуцер, Ansys и т. д.; а также системы автоматизированного проектирования и расчёта (САПР), например Solid Works, содержат в своей алгоритмической основе наборы базисов, ранее найденных исследователями. При этом ни один из современных ПК и САПР не содержат в своей составляющей основе альтернативных базисов СКЭ, так как была создана единственная информационная технология на Turbo Pascal для компьютерной диагностики стационарных физических полей [42] среди учеников А. Н. Хомченко. Возникает интерес к созданию поколения универсальных программно-аппаратных комплексов (ПАК), которые решают следующие классы практических задач:

1. Автоматический режим конструирования оптимальных (базисы, реализующие теоретически обоснованное и физически адекватное распределение узловых нагрузок) функций формы СКЭ на известных расчётных шаблонах.
2. Автоматический режим конструирования оптимальных базисов СКЭ на расчётных шаблонах, на котором ещё не найдены функции формы. Например, для правильных n-угольников вида $n = 2^{2^k} + 1, k \geq 2$ [43].
3. Автоматический режим конструирования оптимальных базисов СКЭ, которые удовлетворяют дифференциальный критерий гармоничности Лапласа [44], интегральные критерии гармоничности Кёбе и Привалова [45, 46].

Безусловно, вышеназванный ПАК является практической реализацией информационной технологии в МКЭ, которая выполняет сбор, обработку, хранение и вывод на дисплей пользователя цифровой информации. Указанная информационная технология и результаты конструктивной теории серендиповых аппроксимаций могут служить качественным инструментом для дальнейшего развития ПК и САПР в МКЭ.

Для 1-го класса задач в качестве алгоритмической основы ПАК имеет место комбинированный алгебро-геометрический метод [47]. Для гарантированной реализации линии ПАК, которые решают задачи 2 и 3-го классов, необходимо разработать качественные математические модели и привлечь искусственный интеллект [48]. Среди бесконечного множества оптимальных базисов СКЭ, которые реализуют один и тот же спектр нагрузок, поиск базиса, который удовлетворяет дифференциальный и (или) интегральный критерии гармоничности, – проблема NP сложности [49] (задача полного перебора).

Для успешного выполнения задач 2 и 3-го классов указанные ПАК должны выполнить всесторонний анализ заданной конфигурации $L = L(x, y, t)$ с формообразованием поверхности базисной функции $N(x,y)=L(x,y,T)$, где T – момент времени, при котором образуется (имеет место) поверхность $N(x,y)$. Неотъемлемой составляющей анализа является исследование промежуточных поверхностей $M(x,y)=L(x,y,T)$, где t = fix (фиксированное значение), образующихся (могут быть получены) в определённом промежутке времени $t\in[0,T]$. A priori, обладая аналитическим видом функции формы $N(x,y)$, можно выполнить визуализацию (получить иллюстративные образы в трёхмерном пространстве *x, y, z*) нестационарной поверхности $L(x,y,t)=N(x,y)\circ T(t)$ в фиксированные моменты времени ($\circ$ – символ композиции функций); в частном случае – $L(x,y,t)=N(x,y)\bullet T(t)$, *T(t)* – нормирующий множитель.

При рассмотрении базисной функции как функции от времени в явном виде, например для СКЭ первого порядка: $N_i(x,y,t)=\mu_1^{(i)}(t)+\mu_2^{(i)}(t)\,x+\mu_3^{(i)}(t)y+\mu_4^{(i)}(t)xy$, i – номер узла, стандартные функции формы могут быть получены с применением аппарата матричной алгебры с учётом интерполяционной гипотезы [8, 9, 29]. В результате для базиса билинейной интерполяции имеет место следующее тождество:

$$\begin{cases} N_i(x,y)\equiv N_i(x,y,T_i)=\mu_1^{(i)}(T_i)+\mu_2^{(i)}(T_i)\,x+\mu_3^{(i)}(T_i)y+\mu_4^{(i)}(T_i)xy, \\ \mu_1^{(i)}(T_i)=\dfrac{1}{4},\, \mu_2^{(i)}(T_i)=\dfrac{1}{4}x_i,\, \mu_3^{(i)}(T_i)=\dfrac{1}{4}y_i,\, \mu_4^{(i)}(T_i)=\dfrac{1}{4}x_i y_i,\, x_i,\, y_i=\pm 1,\, i=1,2,3,4. \end{cases}$$

Фактически с привлечением компоненты времени возникает новый подход к конструированию базисов СКЭ, а именно: искомые функции формы СКЭ – логическое следствие всестороннего (многогранного) анализа моделей $L=L(x,y,t)$.

В строгом смысле и в общем виде $u=u(x,y,t)$ – трёхмерное топологическое многообразие M^3 [50, 51] в четырёхмерном пространстве, $M(x,y)$ – проекция (двухмерное многообразие M^2) многообразия M^3 на трёхмерное пространство. То есть модель отображений ($Hom_{Top}(E^m,M^n)$ [52]), где *Top* – категория топологических пространств, E^m – *m*-мерное эвклидово пространство [53], выглядит следующим образом:

1. $u:E^3\to E^4, u=u(x,y,t)$ – мономорфизм (в общем виде), *x, y, t* – измерения E^3. Трёхмерное многообразие M^3 получено в результате отображения.

2. $f:M^3\to E^3, f$ – мономорфизм (в общем виде), *x, y, z* – измерения E^3. Двухмерное многообразие M^2 (перспектива) – результат операции отображения.

При использовании аппарата «the theory of plafales» [24, 25] процедура получения поверхности $M(x,y)$ (проекции трёхмерного многообразия M^3 на трёхмерное пространство) выглядит следующим образом:

1. $u:PF_k^{U^{SP}}\cong E^2\to E^3, u=u(x,y,t)$ – мономорфизм (в общем виде), *x, y, z* – измерения E^3. Поверхность первого порядка E^2 (плоскость) гомеоморфна объекту «the theory of plafales» – the static canvas of plafal (статический ковёр) $PF_k^{U^{SP}}$ [25, с. 16]. С точки зрения алгоритмической сложности, указанная операция более оптимальна, чем модель из двух последовательных отображений, так как искомое многообразие M^2 получено в результате

одного отображения. Вышеуказанная математическая компонента была заложена (в качестве алгоритмической составляющей) для рендеринга в режиме реального времени в недавно созданной информационной технологии на C#, практической реализацией которой является программно-технический комплекс «Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами» [23].

Разработанные математические модели СКЭ [17 – 22] на основе аппарата «the theory of plafales» [24, 25] включают в себя конфигурации $L = L(x, y, t)$ на квадратном и треугольном шаблонах; и как следствие – моделируют формообразование нестационарных поверхностей полевых функций $U(x, y, t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(x, y) \bullet U_i(t)$. Поиск решения ПАК всех трёх классов задач – это привлечение машинного времени и ресурсов мощностей ЭВМ [54]. Время выступает комплексным инструментом: оно является качественным индикатором работ ПАК и ЭВМ для обработки результатов конструирования базисных и полевых функций. **Четверная роль базисных функций СКЭ имеет следующий смысл:** 1. Их используют в изопараметрической технике и в задачах распределения нагрузок на конечный элемент. 2. На расчётных 2D-шаблонах (квадрат, треугольник и т. д.) базисная функция является функцией от времени в неявном виде, а именно: $N_i(x, y) = L_i(x, y, T_i)$. Качественные свойства и необходимые требования, предъявляемые к функции формы СКЭ, являются результатами анализа моделей $L = L(x, y, t)$ со стороны ПАК.

Выводы

В статье с применением аппарата метаматематики (теории категорий) показано преимущество применения аппарата «the theory of plafales» для всестороннего анализа моделей $L = L(x, y, t)$ в качестве алгоритмических основ ПАК 2 и 3-го классов задач. Для 2-го класса задач ПАК разрабатывают (в случае необходимости) конструктивную (в рамках конструктивной теории функций [41]) математическую модель на основе публикаций [17 – 22]. Четверная роль базисных функций СКЭ имеет следующий смысл: 1. Их используют в изопараметрической технике и в задачах распределения нагрузок на конечный элемент. 2. На расчётных 2D-шаблонах (квадрат, треугольник и т. д.) базисная функция является функцией от времени в неявном виде, а именно: $N_i(x, y) = L_i(x, y, T_i)$. Качественные свойства и необходимые требования, предъявляемые к функции формы СКЭ, являются результатами анализа моделей $L = L(x, y, t)$ со стороны ПАК. Последователями [23, 42] конструктивной теории серендиповых аппроксимаций (школы А. Н. Хомченко) были разработаны информационные технологии для тестирования стационарных и нестационарных физических полей соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. – № 1. – P. 1 – 23.
2. Hanslo P. A Crank-Nicolson Type Space-Time Finite Element Method for Computing on Moving Meshes / P. Hanslo // J. Comp. Physics. – 2000. – № 159 – P. 274 – 289.
3. Argyris J. H. Energy theorems and structural analysis / J. H. Argyris / Aircraft Eng. – 26. – 1954. – P. 347 – 356.
4. Argyris J. H. Energy theorems and structural analysis / J. H. Argyris // Aircraft Eng. – 27. – 1955. – P. 42 – 58.
5. Turner M. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. P. Topp // J. Aeron. Sci. – 1956. – V. 23. – № 9. – P. 805 – 823.
6. Turner M. J. The direct stiffness method of structural analysis / M. J. Turner // 10th Meeting AGARD Struct. Mater. Panel. – Aachen, 1959. – P. 320 – 322.

7. Clough R. W. The finite element method in plane stress analysis / R. W. Clough // J. Struct. Div., ASCE. – Proc. 2-d Conf. Electronic Computation. – P. 345 – 378.
8. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
10. Ergatoudis I. Curved isoperimetric "quadrilateral" elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct. – № 4. – 1968. – P. 31 – 42.
11. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
12. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М. : Мир, 1981. – 216 с.
13. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
14. Wachspress E. I. A rational finite element basis / E. I. Wachspress. – New York : Academic Press, 1975. – 344 p.
15. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – Деп. в ВИНИТИ, № 1213. – 9 с.
16. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – Деп. в ВИНИТИ, № 5167. – 7 с.
17. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій в МСЕ / Д. О. Топчий // Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях: труды международной научно-технической конференции (Харьков, 28 мая – 31 мая 2014 г.). – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2014. – С. 390 – 391.
18. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику першого порядку / Д. О. Топчий // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський національний університет імені І. Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 170 – 182.
19. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику першого порядку / Д. О. Топчий // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Тез. докл. конф. (Кам'янець-Подільський, 4 квітня – 5 квітня 2014 р.). – Кам'янець-Подільський національний університет імені І. Огієнка, 2014. – С. 166 – 167.
20. Топчий Д. О. The theory of plafales: конструювання базисних функцій на трикутнику другого порядку / Д. О. Топчий // Инновационные аспекты геометро-графического образования: материалы международной научно-методической конференции (Севастополь, 6 мая – 7 мая 2014 г.). – Севастопольский национальный технический университет, 2014. – С. 26 – 27.
21. Топчий Д. О. The theory of plafales: конструювання стандартного базису CCE•8 / Д. О. Топчий // Приднепровский научный вестник. – 2014. – № 5 (152). – С. 55 – 65.
22. The theory of plafales: конструювання стандартного базису CCE•12 [Електронний ресурс] / Д. О. Топчий // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2014. – № 3. – Режим доступу до журн.: http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/414/412.
23. Топчий Д. О. Программно-технический комплекс «Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами» / Д. О. Топчий // Электронный научный журнал «Отраслевые аспекты технических наук». – Издательство ИНГН, 2015. – Выпуск 4 (46). – С. 27 – 37.
24. Topchyi D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchyi. – Brentwood: Best Global Publishing, 2011. – 634 p.
25. Topchyi D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems [Електронний ресурс] / D. Topchyi. – Brentwood: Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступу: http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf.
26. Topchyi D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market / D. Topchyi // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI: thesis report. – (Zakopane-Koscielisko, 27 Aug. – 3 Sep. 2013). – Warszawa, 2013. – P. 58.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
28. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
29. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
30. Хомченко А. Н. Стандартные серендиповы многочлены и линейчатые поверхности / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко, И. А. Астионенко // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Міжвузівський збірник. – Вип. № 6. – Луцьк : Луцький націон. техн. університет, 2011. – С. 266 – 269.
31. Арнольд В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2008. – 32 с.
32. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости. Серия : математика, физика. – Белгород : БелГУ, 2009. – Вып. 16. – № 5 (60). – С. 15 – 31.
33. Хомченко А. Н. Геометрическая вероятность и кубическая двумерная интерполяция / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1983. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.11.1983, №1247-D83. – 8

с.
34. Хомченко А. Н. Знакопеременная плотность и полилинейная интерполяция / А. Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007– Вып. 2 (28). – С. 378 – 382.
35. Хомченко А. Н. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий / А. Н. Хомченко, В. В. Крючковский // Матем. модел. в образовании, науке и промыш. — С.-Пб. : МАН ВШ, 2005. – С. 112 – 115.
36. Хомченко А. Н. Моделі методу барицентричного усереднення / А. Н. Хомченко, Н. В. Валько, О. І. Литвиненко // Матеріали міжн. наук.-практ. конф. "Інформаційні технології в системі керування вищою освітою України". – Херсон : ХГУ, 2004. – С. 24 – 26.
37. Хомченко А. Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных / А. Н. Хомченко // III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. Уравнениям : Тез. докл. – Одесса : ОГУ, 1982. – С. 257 – 258.
38. Хомченко А. Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск , 1982. – Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, № 5264. – 5 с.
39. Хомченко А. Н. О модификации серендиповых элементов / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1983. – Деп. в ВИНИТИ 4.07.1983, № 3643. – 4 с.
40. Хомченко А. Н. Серендиповы элементы и геометрическая вероятность / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск , 1983. – Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1983, №629Ук-D83. – 5 с.
41. Бернштейн С. Н. Конструктивная теория функций (1905 – 1930) / С. Н. Бернштейн. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1952. – Т. 1. – 580 с.
42. Литвиненко Е. И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей : дис. канд. техн. наук : 05.13.06 / Литвиненко Елена Ивановна. – Херсон, 1999. – 172 с.
43. Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса / С. Г. Гиндикин // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1972. – № 1. – С. 2 – 11.
44. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
45. Привалов И. И. Математический сборник / И. И. Привалов. – М. : 1925. – Т. 32 – С. 464 – 471.
46. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
47. Астіоненко І. О. Моделі наближення функцій багатопараметричними поліномами серендипової сім'ї: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Астіоненко Ігор Олександрович. – Херсон, 2011. – 180 с.
48. Аксенов С. В. Организация и использование нейронных сетей / С. В. Аксенов, В. Б. Новосельцев. – Томск: Томский политехнический университет, 2006. – 124 с.
49. Cook S. The P versus NP problem / S. Cook // Clay Mathematics Institute, 2000. – P. 1 – 12.
50. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1975. – 224 с.
51. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М.: Физматлит, 2004. – 298 с.
52. Маклейн С. Категории для работающего математика / С. Маклейн. – М.: Физматлит, 2004. – 351 с.
53. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.– М. : Наука, 1976. – 542 с.
54. Таненбаум Э. Архитектура компьютера / Э. Таненбаум. – Pearson Prentice Hall, 2006. – 843 с.

Топчий Дмитрий Олегович – соискатель кафедры прикладной и высшей математики.
Черноморский государственный университет имени Петра Могилы.

Научный руководитель: Заслуженный деятель науки и техники Украины, заведующий кафедрой прикладной и высшей математики ЧГУ имени Петра Могилы, д-р физ.-мат. наук, профессор **Хомченко А. Н.**