УДК 519.685

А. А. Шиян, к. ф.-м. н., доц.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЛЮДЕЙ

Построен математический аппарат для моделирования совместного экономического поведения и классификация отношений между типами экономического поведения людей.

Ключевые слова: *информационное пространство, типы деятельности, совместное управление, оператор.*

Введение и анализ литературы

Экономическое поведение человека является основой современной экономической теории [1]. Деятельность людей зачастую осуществляется коллективно, притом преимущественно в коллективах, которые зачастую состоят всего из нескольких человек. Однако именно такие постановки задач практически не рассматриваются в современной экономической теории: внимание исследователей сосредоточено исключительно на задачах коллективного выбора и формирования коалиций [2,3].

Целью статьи является построение математического аппарата для моделирования совместной экономической деятельности людей для повышения эффективности принятия управленческих решений. Критерии достижения результата состоят в соответствии теоретического прогноза реальным результатам совместной деятельности заданного множества людей.

Постановка задачи

Используя результаты [4, 5], где доказано, что произвольная деятельность человека может быть описана как оператор (двухкомпонентный абстрактный информационный автомат – 2АИА), который действует в специально построенном *информационном пространстве*, построить математический аппарат для моделирования *совместной* деятельности нескольких 2АИА.

Описание алгебры отношений между типами 2АИА

Как было показано в [4, 5], деятельность конкретного человека соответствует одному из 16 типов 2АИА, каждый из которых может быть представлен в виде 4-компонентного вектора, имеющего вид $\{a,b,c,d\}$. Первые две компоненты описывают программную функцию данного 2АИА (и соответствуют информационному пространству, построенному *до* осуществления деятельности), а последние две – его творческую функцию (и относятся, соответственно, к информационному пространству *после* осуществления деятельности человеком). *Первую* компоненту этого вектора задает полюс дихотомии «обобщающий – детализирующий» программной функции, а *вторую* – конкретный класс информации, к которому она относится. *Третья* компонента информации описывает конкретный класс информации, к которому принадлежит творческая функция, а *четвертая* задает, описывает ли творческая компонента состояние или процесс.

Отметим, что вследствие такого определения вторая и третья компоненты вектора типа 2АИА отличаются по полюсу дихотомии «обобщающий – детализирующий», и поэтому при изменении *этого полюса* 2АИА вторая и третья компоненты в записи типа должны поменяться местами.

Как следует из приведенного выше определения для записи типа 2АИА, каждая компонента вектора типа может принимать два значения: *0* или *1*. Выбор фиксации конкретных соответствий для значений переменных – полюсов соответствующих дихотомий – для дальнейшего рассмотрения несущественен: по сути он означает *произвольность* выбора «типа 2АИА, от которого начинается отсчет». Таким образом, тип 2АИА как вектор может быть записан как $\{a,b,c,d\}$, где $a,b,c,d=0;1$. Обозначим множество всех 16-ти типов 2ИА через $\{T_i\}$.

Введем теперь класс операторов, которые определены на множестве $\{T_i\}$ и которые переводят один тип 2АИА в *некий определенный* другой тип 2АИА. Заметим, что этот класс операторов может быть представлен как покомпонентное сложение с вектором типа *определенного* 4-компонентного вектора, который является представлением соответствующего оператора. Сложение должно производиться за *mod 2*. Таким образом, компоненты всех этих векторов образуют в алгебраическом смысле *поле* из двух элементов: *0* и *1* [6].

Базис этого представления операторов образуют *четыре* вектора, которые можно записать как $e_1=\{1,0,0,0\}$, $e_2=\{0,1,0,0\}$, $e_3=\{0,0,1,0\}$, $e_4=\{0,0,0,1\}$.

Заметим, что существует всего лишь 16 разных операторов, которые переводят один тип 2АИА в другой: кроме описанных выше базисных векторов и нулевого вектора $e_0=\{0,0,0,0\}$ (тождественное преобразование), это: $e_5= e_1+ e_2$, $e_6=e_1+ e_3$, $e_7=e_1+ e_4$, $e_8=e_2+ e_3$, $e_9=e_2+ e_4$, $e_{10}=e_3+ e_4$, $e_{11}=e_1+ e_2+ e_3$, $e_{12}=e_1+ e_2+ e_4$, $e_{13}=e_1+ e_3+ e_4$, $e_{14}=e_2+ e_3+ e_4$, $e_{15}=e_1+ e_2+ e_3+ e_4$.

После действия оператора e_1 изменяется полюс дихотомии «обобщающий – детализирующий» в записи типа 2АИА, и поэтому мы должны поменять местами обобщающие и детализирующие классы информации в записи вектора типа (то есть поменять местами второе и третье числа). По этой причине для операторов e_5 – e_{15} операцию «перевода типа в тип» – то есть «закон сложения» для компонент информации – определим следующим образом.

1. Оператор e_1 действует *первым,* изменяя при этом полюс дихотомии «обобщающий – детализирующий» в записи типа 2АИА: «0» на «1» или наоборот, соответственно, вследствие чего *вторые и третьи компоненты вектора типа меняются местами*.
2. А уже только после этого должно осуществляться действие других базисных операторов (то есть происходит суммирование с другими операторами e_i при $i>1$ *для* вектора типа).

Вследствие этого условия совокупность операторов $e_0 - e_{15}$ рассматривается далее как совокупность упорядоченных операторов в значении В.П. Маслова [7].

Таким образом, получена система *операторов* $\{e_i\}$, действие которых осуществляется на множестве $\{T_i\}$. Структуру этого множества задают следующие теоремы.

Теорема 1. Совокупность операторов образует $\{e_i\}$ некоммутативную группу.

Доказательство очевидное: так, например, $e_7 \bullet e_{13} \neq e_{13} \bullet e_7$.

Теорема 2. Группа $\{e_i$ имеет *11* циклических подгрупп порядка *2*.

Теорема 3. Группа $\{e_i\}$ распадается на *3* вида комплексов, элементы которых обладают следующими свойствами: $e_0 \bullet e_0 = e_0$ (*1* комплекс), $e_i \bullet e_i = e_i^2 = e_0$ (*11* наборов комплексов – циклических подгрупп порядка *2*, такие операторы будем называть «симметричными»), и $e_i^4 = e_0$ (*4* набора комплексов – циклических подгрупп порядка *4*, такие операторы будем называть «асимметричными»).

Теорема 4. Группа $\{e_i\}$ является векторным пространством с размерностью *4*.

Следствие. Если имеется описание действия произвольных *четырех* линейно-независимых операторов из $\{e_i\}$, то действие остальных *11* операторов может быть выражено в терминах действия этих операторов (действие *тождественного* оператора e_0 является тривиальным).

Асимметрические операторы из набора $\{e_i\}$ структурируют множество типов 2АИА $\{T_i\}$ следующим образом.

Теорема 5. Множество типов 2АИА $\{T_i\}$ каждым из асимметричных операторов разбивается на *4* равномощных непересекающихся множества (*4 орбиты*, которые состоят из *четырех* разных типов 2АИА).

Следствие. Множество $\{T_i\}$ является суммой четырех множеств, каждое из которых образовано оператором, обладающим свойством $e_i^4 = e_0$.

Определение 1. Оператор e_i из $\{e_i\}$, который переводит один тип 2АИА в другой, будет называться *отношением* между данными типами 2АИА.

Таким образом, на множестве типов 2АИА $\{T_i\}$ вследствие приведенных выше теорем существует всего только *16* разных отношений: *1 тождественное* отношение, *11 симметричных* отношений (когда повторное применение операторов перехода от типа к типу не выводит за пределы этой пары типов) и *4 асимметричных* отношения (когда последовательным применением данного отношения *4* разных типа 2АИА замыкаются в кольцо).

Асимметричное отношение e_{13} является выделенным, так как именно оно обеспечивает наиболее высокий уровень самопрограммирования между парой типов 2АИА. Действительно, как видно, только при таком соотношении между этими типами 2АИА творческая функция первого типа 2АИА *совпадает* с программной функцией другого типа 2АИА. Иными словами, активность первого типа 2АИА вторым типом 2АИА воспринимается как целиком равнозначное описание всего окружающего мира (ведь этот, второй тип 2АИА, «видит» только одну компоненту информации: и притом именно ту, которая является творческой для первого типа 2АИА).

Множество операторов $\{e_i\}$ можно представить также в виде графов – отрезков, которые соединяют две точки (два 2АИА с разными типами). Тогда отметим, что асимметричные отношения могут быть представлены в виде *ориентированных* графов.

Как следует из определения операторов $\{e_i\}$, если произвольный *асимметричный* оператор e_i применить дважды, то получим симметричный оператор: $e_i^2=e_8$. Имеют место также следующие отношения: $e_{12}\bullet e_{13}=e_{13}\bullet e_{12}=e_5\bullet e_6=e_6\bullet e_5=e_0$. Наличие «перекрестных» отношений $e_{14}\bullet e_5=e_{13}$ и $e_{14}\bullet e_6=e_{12}$ и подобных им позволяет выделить отношение e_{14} среди всех симметричных отношений. При этом соотношение $e_{14}\bullet e_5=e_{13}$ вследствие ориентированности графа e_{13} приводит к тому, что граф e_5 также оказывается ориентированным (поскольку граф e_{14} – неориентированный). Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 6. Система графов $\{e_i\}$ структурирована следующим образом: e_0 – кольцо (точка), $e_1 – e_4$, $e_7 – e_{11}$, e_{14} , e_{15} – *неориентированные* графы (симметричные отношения, причем граф e_{14} является выделенным в плане состыкования между собой орбит, образованных действием симметричных операторов), e_5 , e_6, e_{12} и e_{13} – *ориентированные* графы (притом информация распространяется только по графам e_{13} и e_5, а графы e_{12} и e_6 *ориентированы противоположно* направлению распространения информации, и поэтому могут рассматриваться как «информационные пробки»). Граф e_1 является выделенным, так как его применение приводит к радикальной перестройке вектора представления типа.

Слова из $\{e_i\}$ как цепочки выработки решений

Определение 2. Произвольную последовательность операторов из $\{e_i\}$ будем называть *словом* (последовательность применения операторов – справа налево).

Каждое такое *слово* задает цепочку выработки решений. Другими словами, каждое *слово* задает определенную цепочку распространения информации.

Примечание. Отметим, что «общаться» между собой «на равных» могут только типы, обладающие одним и тем же полюсом дихотомии «обобщающий – детализирующий». Действительно, *обобщающий* тип осуществляет управления «от общего к частному», тогда как *детализирующий* тип 2АИА – наоборот, «от частного к общему» (см. теорему 6).

Весьма важным является то обстоятельство, что одно и то же *слово* может объединять в определенный путь *разные* множества 2АИА (особенно наглядно это видно при представлении операторов в виде графов).

Определение 3. *Слова* на множестве заданных типов 2АИА будем называть *эквивалентными* в смысле осуществления управления, если они опираются своим началом и окончанием на зафиксированные типы 2АИА (которые могут быть как разными, так и совпадающими; в последнем случае получим *цикл (кольцо)* из 2АИА).

Можно сказать, что слова – это топологически инвариантные конструкции на множестве $\{T_i\}$.

Общий алгоритм решения задач по управлению социально-экономической системой произвольной природы с помощью заданного множества 2АИА выглядит следующим образом.

1. Определяются *все типы 2АИА*, которые имеются в заданной совокупности людей (то есть определяются типы для всех людей в данном коллективе).
2. Определяются *все типы* операторов e_i, которые связывают пары разных типов 2АИА, существующих в заданном множестве 2АИА.
3. Выбираются *слова*, которые являются оптимальными для решения поставленной цели управления и принятия управленческих решений (то есть *фиксируются* как типы 2АИА для конкретных людей, так и *отношения* между ними).

Отметим, что цели управления в общем случае могут отличаться от тех, которые перечислены выше: они определяются конкретным наполнением задачи. Таким образом, вместо того, чтобы исследовать цепочки передачи информации (цепочки выработки нового режима управления) между конкретными типами 2АИА, теперь можно исследовать *слова*, которые являются инвариантными и не зависят уже от выбора конкретных типов.

Информационная классификация конструкций для совместной деятельности

Рассмотрим информационные характеристики конструкции, которая возникает на множестве $\{T_i\}$ при требовании максимально полной выработки нового совместного управления. Иными словами, необходимо найти такую конструкцию, в которой задействованы все 16 типов 2АИА и все 16 типов отношений между ними и которая максимально приспособлена для выработки нового управления. Такая конструкция должна иметь максимальное количество замкнутых путей (циклов), которые состоят из асимметричных операторов. Построим такую конструкцию.

Данный тип 2АИА (тот, который «ставит задачу» перед остальными типами 2АИА) формирует кольцо (цикл) *индивидуального* самопрограммирования) с помощью последовательного применения оператора e_{13}.

Действие этого же оператора e_{13} разбивает множество $\{T_i\}$ еще на *3* кольца (цикла) самопрограммирования. Только одно из полученных колец индивидуального самопрограммирования может быть состыковано с данным типом 2АИА таким образом, чтобы создать единое целое, то есть кольцо (цикл) *сдвоенного («диадного»)* самопрограммирования. Такое кольцо получится, если к данному типу 2АИА присоединить с помощью оператора e_{14} соответствующий тип 2АИА вместе с тем кольцом (циклом) индивидуального самопрограмирования, в которое входит тот тип. В этом случае каждая пара типов, которая находится в одном звене такого «сдвоенного» кольца (кольца *диадного* самопрограммирования) будет связана все тем же оператором e_{14}.

Таким образом, все множество $\{T_i\}$ разбивается на *два* кольца диадного самопрограммировани, одно из которых содержит заданный тип 2АИА, а другое – нет.

Два кольца индивидуального самопрограммирования, которые составляют *второе* кольцо диадного самопрограммирования (то есть то, которое осталось) можно в свою очередь присоединить к заданному типу 2АИА только с помощью четырех разных операторов, которые не изменяют у выделенного нами типа 2АИА полюса дихотомии «обобщающий – детализирующий». При этом объединение происходит с такими типами 2АИА, у которых или программная, или же творческая функции *совпадают* с соответствующими функциями данного типа 2АИА или же типа, который получен из него с помощью оператора e_{14} (такой тип называется «*диадным*»).

При любых иных способах присоединения колец индивидуального самопрограммирования к данному типу 2АИА оптимальная передача информации достигнута не будет (поскольку информация будет искажаться при коммуникации заданного типа 2АИА с другими типами 2АИА, с которыми он находится *в одном и том же звене*, то есть действует совместно).

Таким образом, приходим к следующей теореме (математические детали см., например, в [8]).

Теорема 7. Конструкция на множестве типов 2АИА $\{T_i\}$, которая способна оптимально преобразовать новую информацию, в топологическом смысле гомотопически эквивалентна букету из 6 окружностей.

Следствие. Описанная в теореме 7 конструкция диффеоморфна двухмерной сфере с 7 вклеенными пленками Мебиуса. Число Эклера для этой конструкции $\chi=-5$.

Определение 4. Введенную в Теореме 7 конструкцию будем называть *соционом*.

Отметим, что в *соционе* для произвольного типа 2АИА присутствуют *все возможные* на множестве $\{T_i\}$ операторы (то есть все отношения между типами). Таким образом, социон является тем объектом, который включает *наиболее длинное слово*, в котором все типы из $\{T_i\}$ присутствуют только по одному разу (то есть наиболее длинный путь без повторов). В соционе также реализуется случай, когда отдельные типы 2АИА осуществляют коммуникацию с наибольшим количеством других типов 2АИА. Социон является как раз таким объектом, который должен быть создан для того, чтобы выработать всю совокупность возможных режимов (способов, алгоритмов, методов) для осуществления управления в произвольной социально-экономической системе.

Другими словами, социон является объектом, который *тождественен* максимально возможной коалиции в условиях симметричной информации. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. «Информационная емкость» заданной совокупности людей задается топологическими особенностями фундаментальной группы, построенной на множестве тех слов, которые могут быть созданы на основе тех типов 2АИА, соответствующих людям из этой совокупности, и она не может быть больше, чем информационная емкость социона.

Замечание. Полученные результаты могут быть получены также «геометрическим» способом, когда соответствующие операторы представляются в виде графов.

Интересно, что, как следует из теоремы 7, оптимальный для функционирования социона разветвляющийся граф может быть описан в виде объекта, в котором есть 1 «*вход*» – асимметричный оператор, 1 «*выход*» – асимметричный оператор и 5 неориентированных ребер – симметричных операторов.

Заметим, что в общем случае произвольный тип 2АИА может функционировать в составе социона только в том случае, когда на него опирается граф из 7±2 разветвлениями-ребрами. Это утверждение является, вероятно, первым *замкнутым* математическим доказательством для известного в психологии и менеджменте факта, что коммуникация между людьми возможна только между 7±2 коммуникантами [9]. Также это может служить вариантом доказательства гипотезы Ингве [10].

Применение и апробация

Методика использования полученных результатов описана в [4, 11 – 14].

Наиболее полно сегодня описана совместная управленческая деятельность *пар* людей, то есть описаны проявления *отдельных* операторов e_i из $\{e_i\}$ [11 – 13]. Так, получены теоретические прогнозы для уровня эффективности совместной деятельности политиков Л. Кучмы и Д. Табачника [11, 12], М. Шаймиева и В. Путина [13], а также взаимодействия между рядом других политиков [14], благодаря чему удалось описать целый ряд специфических эффектов при их совместной управленческой деятельности.

Также разработаны *слова* для осуществления эффективной совместной деятельности людей, которые состоят из *нескольких* операторов. Например, такая эффективная цепь для *целенаправленного* управления конкретным человеком была успешно апробирована [11, 12]. Уже несколько лет в одной из частных фирм г. Винница для организации управления конкретным человеком – директором фирмы – применяется *слово* $e_{13} \bullet e_4$, которое было предложено в качестве оптимального исходя из анализа конкретного состава типов 2АИА для сотрудников фирмы. Необходимость этого была вызвана тем обстоятельством, что типы *заказчика* (человека, который *задает* управление) и директора фирмы связаны асимметричным отношением e_6, то есть *заказчик* не имеет никакой возможности передать информацию своему директору (информация может быть передана только от директора к нашему *заказчику)*. Для управления использован *третий* человек. Интересно, что директор фирмы даже не подозревает, что он уже много лет выступает в роли «мишени» для управления (то есть управление производится настолько «естественно» и комфортно для него, что он считает его … *собственными* решениями). Отметим, что морально-этические аспекты этой проблемы нами были специально оговорены с *заказчиком*.

Выводы

1. В статье построен математический аппарат для моделирования совместного экономического поведения людей.

2. Построена классификация отношений между типами экономического поведения людей.

3. Использование развитого в статье формализма для описания способа принятия совместных управленческих решений конкретными людьми опубликовано в [11 – 14]. Теоретические результаты подтверждены.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – 977 p.
2. Нуреев Р.М. Общественный выбор: теория и практика. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2005. – 532 с.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
4. Шиян А.А. Економічна кібернетика: вступ до моделювання соціальних і економічних систем. – Львів: «Магнолія 2006», 2007. – 228 с.
5. Шиян А.А. Информационное пространство и классификация стратегий управленческой деятельности в теории игр и принятия решений // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 3 (10). – С. 131 – 139.
6. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука,1976. – 648 с.
7. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука,1973. – 544 с.
8. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
9. Miller G.A. The Magic Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information // Psychology Review, 1956. – March. – P. 81 – 97.
10. Словарь по кибернетике / под ред. В.С. Михалевича. – Киев: Гл. ред. УСЭ им. М.П. Бажана, 1989. – С. 751.
11. Шиян А.А. О роли коммуникантов в обеспечении психологического комфорта: от стресса к суициду // Прикладная психология (Москва). – 2000. – № 4. – С. 67 – 79.
12. Курносов Ю.В., Конотопов П.Ю. Аналитика: методология, технология и организация информационно-аналитической работы. – М.: РУСАКИ, 2004. – 512 с.
13. Мингазов Р., Киямов И. Президентский характер: личность М. Ш. Шаймиева в ракурсе современных социальных технологий // Татарстан. – 2003. – № 1. – С. 4 – 9.
14. Шиян А.А. Соціально-психологічні портрети політиків: О.О. Мороз, Н.М. Вітренко та В.П. Горбулін // Нова Політика. – 1998. – № 4. – С. 24 – 28.

Шиян Анатолий Антонович – доцент кафедры проектирования медико-биологической аппаратуры, *: LMaximus@yandex.ru,http://soctech.narod.ru*.

Винницкий национальный технический университет