

УДК 681.3:621.375

А. Д. Азаров, д. т. н., проф.; А. А. Решетник; С. В. Богомолов**СИСТЕМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ С ВЕСОВОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ ДЛЯ
БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ АЦП ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ И САМОКАЛИБРУЮЩИХСЯ ЦАП**

Приведен обзор систем исчисления с весовой избыточностью. Проанализированы теоретико-числовые свойства систем исчисления с весовой избыточностью. Проанализирована возможность реализации ЦАП и АЦП с весовой избыточностью на базе неизбыточных ЦАП. Показана возможность использования избыточных систем исчисления с весовой избыточностью и искусственным базисом на основе двоичных рядов для построения избыточных ЦАП на основе неизбыточных двоичных ЦАП без создания специализированной элементной базы.

Ключевые слова: АЦП, ИПСИ (избыточные позиционные системы исчисления), СИВИ (системы исчисления с весовой избыточностью).

Введение

Подавляющее большинство современных преобразователей формы информации (ПФИ) в виде АЦП и ЦАП реализуется с использованием классической двоичной системы исчисления [1 – 5]. Вместе с тем в ряде случаев построение АЦП и ЦАП на базе систем исчисления с весовой избыточностью [9] позволяет комплексно решать проблемы повышения быстродействия и точности АЦП, а также ЦАП, построенных на низкоточной элементной базе.

Принципиальным недостатком использования двоичной системы исчисления в ПФИ является то, что наличие инструментальных статических погрешностей приводит к появлению в характеристике преобразования ЦАП зон, в которых исходную аналоговую величину нельзя набрать ни одной кодовой комбинацией. Такие зоны называются разрывами характеристики преобразования [1, 2, 5, 7, 8]. Это, в свою очередь, приводит к возникновению в АЦП, построенному на таком ЦАП, так называемых пропусков кодов [9]. Для реализации АЦП без пропусков кода надо использовать ЦАП с весовой избыточностью, который не имеет разрывов характеристики преобразования. Такой подход, вдобавок, упрощает калибрование весов разрядов и позволяет формировать результат превращения в АЦП одновременно с компенсацией динамических погрешностей, за счет этого сокращается время преобразования и повышается быстродействие.

Актуальность

К разрывам характеристики преобразования в АЦП поразрядного приближения приводит как наличие инструментальных статических погрешностей (отклонение весов разрядов) в ЦАП, так и динамических погрешностей, когда продолжительность такта во время поразрядного уравнивания является недостаточной для завершения переходных процессов.

Использование весовой избыточности при построении ЦАП и АЦП позволяет формировать неразрывную характеристику преобразования при наличии не только статических, но и динамических погрешностей, которые возникают в АЦП во время поразрядного уравнивания.

Следует отметить, что описанный подход позволяет повышать точность многоразрядных АЦП и ЦАП, построенных на неточных элементах (погрешности 5% – 10%), путем самокалибрования весов разрядов [9]. Кроме того есть возможность значительного (на один, два порядка) повышения быстродействия АЦП поразрядного уравнивания. Тем не

менее уровень исследования систем исчисления с весовой избыточностью (СИВИ), а также особенностей их применения в технике АЦП и ЦАП является недостаточным. Поэтому анализ теоретико-числовых свойств СИВИ, направленных на повышение быстродействия и точности аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования на основе применения разных видов СИВИ, является актуальным.

Цель

Целью статьи является анализ и систематизация систем исчисления с весовой избыточностью, которые используются в ПФИ для повышения быстродействия и точности.

Задачи

Согласно указанной цели формируются такие задачи:

- 1) обзор систем исчисления с весовой избыточностью и оценка уровня этой избыточности в зависимости от их разновидностей;
- 2) анализ теоретико-числовых свойств СИВИ;
- 3) анализ возможностей реализации ЦАП и АЦП с весовой избыточностью на базе неизбыточных двоичных ЦАП.

Решение задач

Системой исчисления, или нумерацией, [11] является совокупность приемов и правил для наименования и обозначения чисел. Набор весов разрядов системы исчисления – это базис $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-1}\}$. Алфавит – это множество значений, которые может принимать каждый разряд системы исчисления $a \in \{0, 1\}$, $a \in \{-1, 1\}$ или $a \in \{-1, 0, 1\}$. Таким образом, система исчисления может задаваться через основу системы исчисления, базис и алфавит. Так, классическая двоичная система исчисления имеет основу 2, базис 1; 2; 4; ... 2^{n-1} и алфавит $\{0, 1\}$. В зависимости от закона задания веса i -го разряда можно поделить системы исчисления на системы с естественными и искусственными базисами. В естественном базисе существует постоянное соотношение между весами разрядов – $\alpha = \frac{Q_i}{Q_{i-1}}$, причем, это соотношение является основой системы исчисления. В системах исчисления с искусственным базисом вес каждого разряда формируется по определенному закону из весов младших разрядов (например, как сумма двух предыдущих разрядов в системе исчисления Фибоначи).

В позиционных системах исчисления с дробовыми весами разрядов («золотые» p - и s -пропорции) любое действительное число можно представить в виде:

$$A^* = \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \alpha^i,$$

где a_i – цифра в i -м разряде, α – основа системы исчисления. Тем не менее в технике преобразования информации данное выражение неприемлемо, поскольку подразумевает наличие бесконечно длинной разрядной сетки. На практике длина разрядной сетки ограничена [9]. Поэтому в данном случае целесообразно использовать выражение для натуральных чисел:

$$N^* = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i.$$

В СИВИ с естественным базисом возникают проблемы с точным изображением целых чисел. Эту особенность необходимо учитывать при построении ПФИ при реализации цифровой части. Вместе с тем неточность представления целых чисел отнюдь не влияет на

точность преобразования аналог-код или код-аналог. Это является принципиальным аргументом в пользу СИВИ, поскольку в АЦП или ЦАП независимо от того, какая в них используется система исчисления, всегда есть инструментальные погрешности на уровне половины младшего разряда.

Суть весовой избыточности проявляется в том, что сумма весов младших разрядов больше или в крайнем случае равна весу старшего разряда (весовая избыточность проявляется таким образом как в системах с естественным базисом, так и в системах с искусственным базисом):

$$\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j \geq Q_i.$$

При этом абсолютная весовая избыточность определяется как:

$$\Delta Q_i = \sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i,$$

Понятие относительной весовой избыточности определяет уровень избыточности для статики. Уровень весовой избыточности в статике показывает возможный суммарный уровень отклонений весов разрядов, при котором характеристика преобразования остается неразрывной:

$$\delta Q_i = \frac{\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i}{\sum_{j=0}^{j=i} Q_j}.$$

При условии постоянности α для систем исчисления с естественным базисом справедливо такое соотношение:

$$\delta Q_i \approx \frac{2 - \alpha}{\alpha}.$$

Для динамики, когда имеют место кратковременные изменения веса разряда в процессе уравнивания, используется понятие приведенной относительной весовой избыточности [9]:

$$\tilde{\delta} Q_i = \frac{\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i}{Q_i}.$$

Таким образом, динамическая погрешность формируется как взнос от одного разряда. Динамическая погрешность первого рода существует короткий отрезок времени (на протяжении одного или нескольких тактов).

Следует отметить, разные уровни весовой избыточности принимают участие в корректировании статических и динамических погрешностей. Для корректирования статических погрешностей, значение которых зафиксировано и не изменяется на протяжении определенного времени, используется относительная весовая избыточность, которая пропорционально отображается из всех разрядов АЦП или ЦАП во время преобразования, таким образом статическая погрешность формируется как сумма, взнос в которую делают все разряды.

СИВИ можно формировать как на основе естественного, так и на основе искусственного базиса. К СИВИ с естественным базисом принадлежат системы исчисления «золотых» r - и s -пропорций или ИПСИ [9]. Такие системы исчисления имеют основу и постоянный уровень весовой избыточности. К СИВИ с искусственным базисом принадлежат система исчисления

Фибоначи, некоторые двоично-десятичные коды (ДДК) и описанные ниже СИВИ на основе двоичных рядов. Следует указать, что ДДК широко используются в измерительной технике для удобного представления результатов измерения в десятичной системе исчисления. Для искусственного базиса нельзя использовать понятие основы системы исчисления, поскольку отношение между весами соседних разрядов не является постоянным.

Уровень весовой избыточности в СИВИ с естественным базисом зависит от значения основы α (рис. 1 а). В табл. 1 дано значения относительной весовой избыточности для разных α в случае естественного базиса.

Таблица 1

α	2,00	1,90	1,80	1,70	1,618	1,60	1,50	1,40
δQ_i (%)	0	5,26	11,11	17,65	23,62	25,00	33,33	42,86
$\tilde{\delta} Q_i$ (%)	0	11,11	24,99	42,86	61,81	66,66	99,99	149,94

Из таблицы 1 видно, что $\delta Q_i < \tilde{\delta} Q_i$, поэтому для компенсации динамических погрешностей есть больше возможностей, чем для корректирования статических.

В СИВИ по сравнению с двоичной системой исчисления удлиняется разрядная сетка [9]. Степень удлинения определяется коэффициентом удлинения разрядной сетки (рис. 1 б):

$$\gamma_n = \frac{\ln 2}{\ln \alpha}.$$

В табл. 2 показано значения коэффициента γ_n для отдельных α из естественного базиса.

Следует отметить, что для $\alpha = 1$ имеем $\gamma_n = \frac{2^n}{n}$. Приведенная формула для γ_n соответствует

случаю, когда двоичный и избыточный диапазон точно совпадают. При конкретном числе разрядов системы исчисления такая формула дает лишь приблизительный результат. На практике целесообразно учитывать, что реальный коэффициент удлинения может быть больше (или меньше) на значение $1/n$ (n – количество двоичных разрядов), тем не менее диапазон СИВИ при этом увеличивается (или уменьшается). Это обусловлено тем, что диапазон представления чисел СИВИ может быть больше или меньше диапазона представления чисел в двоичной системе исчисления, тем не менее очень редко диапазоны полностью совпадают. При выборе СИВИ надо учитывать уровень весовой избыточности и реальный коэффициент удлинения разрядной сетки. Вместе с тем коэффициент удлинения разрядной сетки для СИВИ с искусственным базисом определяется числом разрядов.

Таблица 2

α	1,20	1,30	1,414	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
γ_n	3,80	2,64	2,00	1,71	1,48	1,31	1,18	1,08	1,00

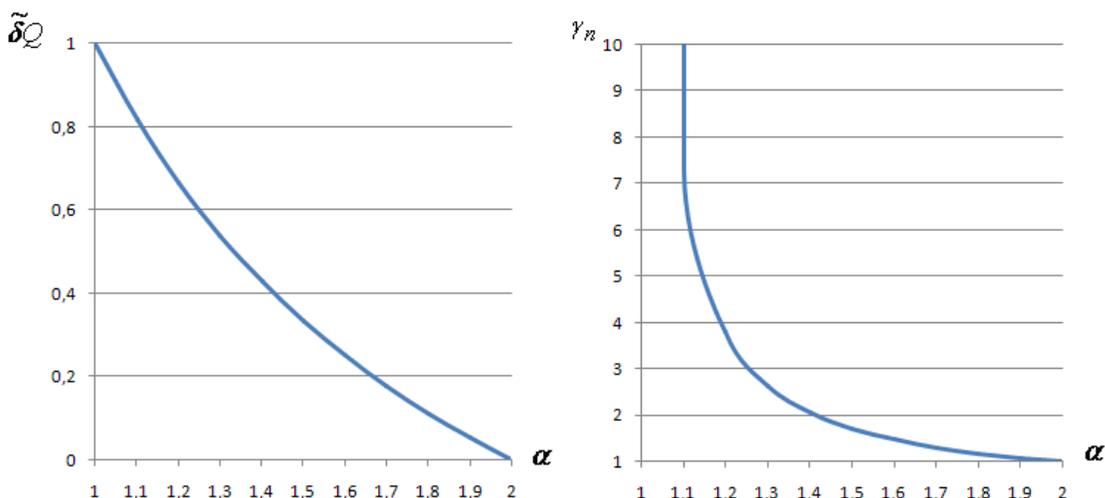


Рис. 1. Зависимость дополнительных параметров СИВИ от α : а) уровень относительной весовой избыточности, б) коэффициент удлинения разрядной сетки

Следует отметить, что построение ПФИ на основе СИВИ требует создания специфической элементной базы для каждой отдельной СИВИ. Вместе с тем, несмотря на возможность использования при этом упрощенной технологии изготовления аналоговых узлов АЦП и ЦАП, это может стать помехой на пути технической реализации.

Для преодоления этого технико-экономического барьера при практической реализации ПФИ авторы предлагают несколько подходов относительно построения ЦАП с весовой избыточностью на основе классической неизбыточной двоичной системы исчисления [12]. Последнее дает возможность проецировать избыточные ЦАП и АЦП с улучшенными статическими и динамическими характеристиками на базе традиционных двоичных ЦАП и не требует создания оригинальной элементной базы. Примеры формирования избыточных рядов на базе двоичных рядов и их характеристики приведены в табл. 3:

Таблица 3

№	Ряд	Відносна вагова надлишковість, δQ		Коефіцієнт подовження розрядної сітки, γ_n	Питома вагова надлишковість, γ_E
		min	max		
1	1; 1; 2; 2; 4; 4; ... $2^{n-1}; 2^{n-1};$	0,27	0,49	2	0,14/0,25
2	1; 1,5; 2; 3; 4; 6; ... $2^{n-1}; 1,5 \cdot 2^{n-1};$	0,39	0,43	2	0,19/0,22
3	1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; ... $2^{n-1};$ $2^{n-1}\sqrt{2};$	0,414		2	0,207
4	1; 2; 3; 4; 8; 12; ... $2^{n-2}; 2^{n-1};$ $2^{n-2} + 2^{n-1};$	0,19	0,33	1,5	0,13/0,17/0,22

Если же отношение между соседними членами базиса не является постоянным, то коэффициент удлинения разрядной сетки можно определить как отношение соответствующего количества избыточных разрядов к количеству двоичных разрядов при условии одинаковости диапазонов изображения чисел [9].

Выбор типа СИВИ целесообразно осуществлять, используя удельную весовую избыточность $\gamma_{ПВН}$, которая определяется как отношение уровня относительной весовой избыточности к коэффициенту удлинения разрядной сетки:

$$\gamma_{ПВН} = \frac{\delta Q}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i\right) \ln(\alpha)}{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} + \alpha^i\right) \ln(2)}$$

и приведенную удельную весовую избыточность:

$$\tilde{\gamma}_{ПВН} = \frac{\tilde{\delta Q}}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i\right) \ln(\alpha)}{\alpha^i \ln(2)}.$$

Проанализируем приведенные функции на экстремум на промежутке от 1 до 2. Продифференцировав функции, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \gamma'_{ПВН} &= \frac{1}{\ln(2)} \left(\left(\alpha^i \frac{i}{\alpha} - 2\alpha + 1 \right) \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^{i+1} - 1} + \frac{\alpha^i - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha(\alpha^{i+1} + 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(\alpha^i - \alpha^2 + \alpha - 1) \ln(\alpha)}{(\alpha^{i+1} + 1)^2} \alpha^{i+1} \frac{i+1}{\alpha} \right) \right), \\ \tilde{\gamma}'_{ПВН} &= \left(\alpha^i \frac{i}{\alpha(\alpha - 1)} - \frac{\alpha^i - 1}{(\alpha - 1)^2} - \alpha^i \frac{i}{\alpha} \right) \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^i \ln(2)} + \\ &\quad + \frac{\alpha^i - 1}{\alpha^{i+1} \ln(2)} - \left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i \right) \frac{\ln(\alpha) i}{\alpha^{i+1} \ln(2)}. \end{aligned}$$

Корнями уравнения являются самые оптимальные значения α для статики $\alpha = 1,375$ и динамики $\alpha = 1,1575$. Нормировав каждую функцию по собственному экстремуму, можно найти точку пересечения, в которой динамические и статические характеристики сбалансированы $\alpha = 1,2553$.

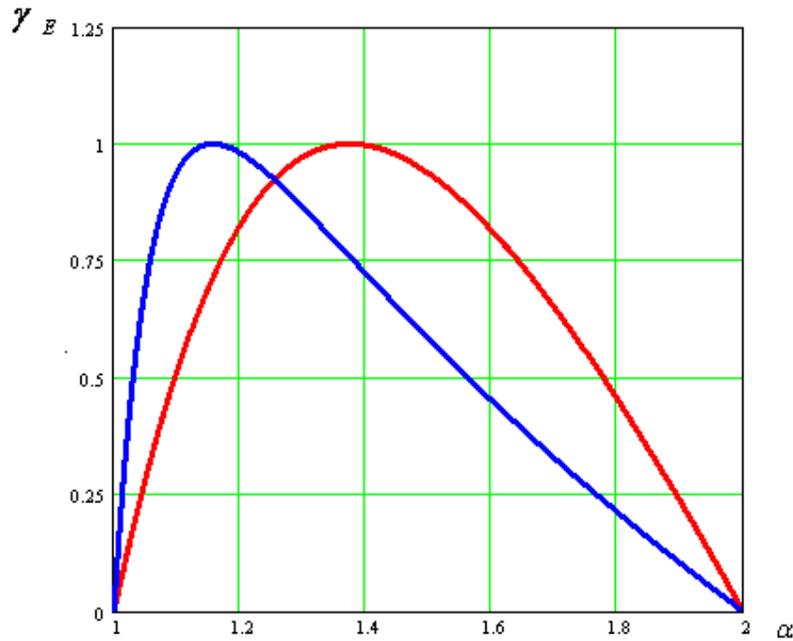


Рис. 2. Зависимость удельной весовой избыточности от α

Анализируя данные графики (рис. 1 – 2), легко сделать вывод, что зоной оптимума для СИВИ на основе естественного базиса является значения основы от 1,2 до 1,6. Тем не менее в пределах значения $1.2 \leq \alpha < 1.4$ коэффициент удлинения разрядной сетки резко возрастает с уменьшением α . А в пределах от 1,4 до 1,6 коэффициент удлинения остается меньше двух.

Рассмотренные СИВИ с искусственным базисом на основе двоичной системы исчисления имеют коэффициент удлинения разрядной сетки 2. При этом уровень весовой избыточности таких систем может достигать $\delta Q = 0,4-0,5$. Преимуществом приведенных систем исчисления является возможность построения ПФИ с весовой избыточностью на их основе без создания специализированной элементной базы.

Использование СИВИ на основе двоичных рядов позволяет строить избыточный ЦАП на базе неизбыточных двоичных ЦАП. Рассмотрим структурную реализацию такого ЦАП (рис. 3) на примере базиса $1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4; 4\sqrt{2}; \dots; 2^{n-1}; 2^{n-1}\sqrt{2}$. ЦАП содержит два двоичных ЦАП, сумматор аналоговых сигналов и масштабный блок. Выходы ЦАП подключены к сумматору аналоговых сигналов, причем один из ЦАП подключен через специальный масштабный блок М (в данном случае коэффициент передачи $\sqrt{2}$). Входы двоичных ЦАП подключены к внешней входной шине избыточного ЦАП поочередно, в порядке роста весов разрядов.

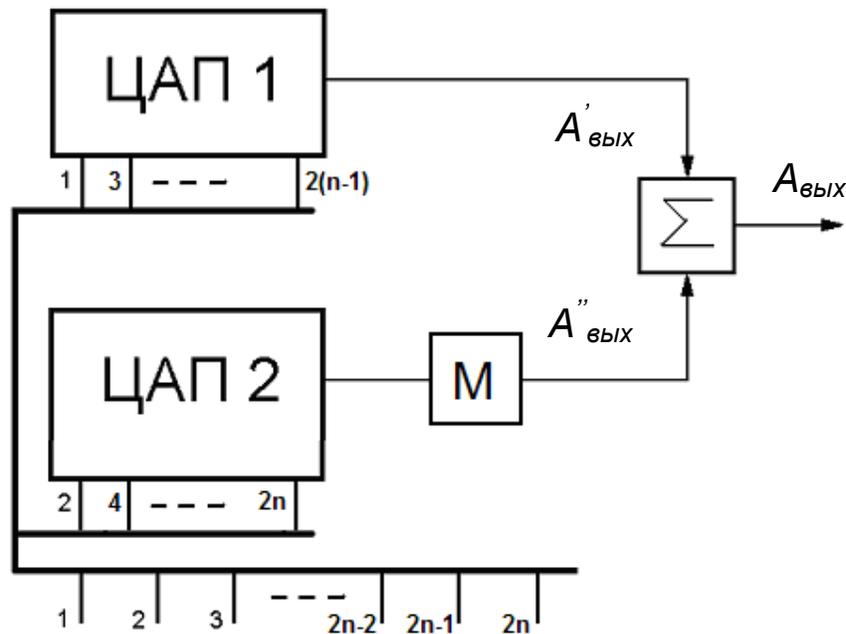


Рис. 3. Избыточный ЦАП на базе двух двоичных неизбыточных ЦАП

Таким образом, использование СИВИ на основе двоичных рядов позволяет строить избыточные ЦАП на базе двоичных неизбыточных ЦАП, которые не имеют разрывов передаточной характеристики даже при наличии отклонений весов разрядов.

Выводы

Осуществлен обзор систем исчисления с весовой избыточностью (СИВИ) как с естественным, так и с искусственным базисом. Показано, что для СИВИ с естественным базисом значения основы системы исчисления α возле точки 1,37 дают наибольшую эффективность. Рассмотренные СИВИ с искусственным базисом на основе двоичных рядов имеют коэффициент удлинения разрядной сетки 2. При этом уровень весовой избыточности таких систем может достигать $\delta Q = 0,4-0,5$, что соответствует зоне оптимума для СИВИ с естественным базисом.

Показана возможность использования избыточных систем исчисления с весовой избыточностью и искусственным базисом на основе двоичных рядов для построения избыточных ЦАП на основе неизбыточных двоичных ЦАП без создания специализированной элементной базы. В ряде случаев предоставляется возможность получения базиса с постоянным отношением между весами соседних разрядов для таких систем исчисления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров О.Д., Архипчук О.А., Захарченко С.М. Високолінійні порозрядні АЦП з ваговою надлишковістю для систем ресстрації і оброблення сигналів. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. – 125 с.
2. Микроэлектронные цифро-аналоговые и аналого-цифровые преобразователи информации / Под ред. В.Б. Смолова. – Л.: Энергия, 1976. – 336 с.: ил.
3. А. с. 1231609 СССР, МКИЗ Н03М1/26. Аналого-цифровой преобразователь / А. П. Стахов, А. Д. Азаров, В. Я. Стейскал, О. В. Конючевский (СССР). – № 3790665/24–24; заявл. 18.09.84; опубл. 15.05.86, Бюл. №18.
4. А. с. 1221750 СССР, МКИЗ Н03М1/26. Аналого-цифровой преобразователь / А. П. Стахов, В. И. Моисеев, А. Д. Азаров, В. Я. Стейскал, Т. Н. Васильева (СССР). – № 3782076/24–24; заявл. 15.08.84; опубл. 30.03.86, Бюл. №12.5. Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи / Под ред. В.Б. Смолова и Е.А. Смирнова. – Л.: Энергия, 1967. – 312 с.: ил.

6. Азаров О.Д., Коваленко О.О. Обчислювальні АЦП і ЦАП, що самокалібруються, для систем цифрового оброблення аналогових сигналів: Монографія / Під заг. ред. О.Д. Азарова. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. – 147 с.

7. Галелюка И. Как виртуальная плата ADIsimADC™ моделирует поведение преобразователей данных // ЭКис. – 2006. – №6. – С. 8 – 11.

8. Грушвицкий Р. И. и др. Аналого-цифровые периферийные устройства микропроцессорных систем – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 160 с.: ил.

9. Азаров О.Д. Основи теорії аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 260 с.

10. Островерхов В. В. Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. – Л.: Энергия, 1975. – 176 с.: ил.

11. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. Учеб. пос. – М.: – Высш. школа, 1970. – 308 с.: ил.

12. Азаров О.Д., Решетник О.О., Гарнага В.А. Методи побудови ЦАП із ваговою надлишковістю на базі двійкових ЦАП // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – Київ, 2006. – №3. – С. 5 – 11.

Азаров Алексей Дмитриевич – д. т. н., профессор, директор института информационных технологий и компьютерной инженерии, заведующий кафедрой вычислительной техники; e-mail: azarov@lili.vstu.vinnica.ua

Решетник Александр Александрович – аспирант кафедры вычислительной техники; e-mail: de_gratnik@rambler.ru

Богомолов Сергей Васильевич – магистр кафедры вычислительной техники.
Винницкий национальный технический университет.