

УДК 62-838

**А. Б. Мокин, д. т. н., проф.; Б. И. Мокин, д. т. н., проф., акад. НАПН Украины;
В. А. Лобатюк; О. П. Кубрак**

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С КОМБИНИРОВАННЫМ ПРИВОДОМ

Произведена декомпозиция задачи оптимизации движения транспортного средства с комбинированным приводом от двигателя внутреннего сгорания и от электрического двигателя постоянного тока при условии, что транспортное средство движется по дороге, которая, кроме горизонтальных участков, содержит также спуски и подъемы.

Ключевые слова: транспортное средство с комбинированным приводом, двигатель внутреннего сгорания, двигатель постоянного тока, оптимизация движения.

Исходные предпосылки и постановка задачи

Сейчас наряду с транспортными средствами, движение которых обеспечивают двигатели внутреннего сгорания, и транспортными средствами, движение которых обеспечивают электроприводы, которые получают питание от аккумуляторных батарей, становятся распространенными также транспортные средства с комбинированным приводом, содержащим в своей структуре как двигатель внутреннего сгорания, так и электропривод с питанием от аккумуляторной батареи.

Поскольку расстояние, которое может покрыть транспортное средство с двигателем внутреннего сгорания, в первую очередь, зависит от емкости бака с горючим и расхода топлива на километр пути, а расстояние, которое может покрыть транспортное средство с электроприводом, в первую очередь, зависит от емкости аккумуляторной батареи и расходов электроэнергии на километр пути, то при ограниченных значениях емкостей бака и аккумуляторной батареи, заданных заводами, которые их производят, актуальной является задача определения такого соотношения расхода топлива и электроэнергии, которое позволяет транспортному средству с комбинированным приводом покрыть самое большое расстояние без дозаправки горючим и подзарядки аккумулятора.

Учитывая то, что транспортное средство в реальных условиях осуществляет движение не только на горизонтальных участках пути, но и на спусках и подъемах, видим, что решение данной оптимизационной задачи нужно начинать с ее декомпозиции. Именно этому этапу решения сформулированной выше задачи и посвящена данная статья.

Решение поставленной задачи

Решать поставленную задачу начнем с ее привязки к известному из курса теоретической механики [1] уравнению

$$m \frac{dV}{dt} = F_T - F_s, \quad (1)$$

описывающему движение во времени t автомобиля массой m со скоростью V под действием силы тяги F_T , создаваемой двигателем, которой приходится преодолевать силу сопротивления F_s .

Как известно из той же теоретической механики [1] и аэродинамики [2], сила сопротивления F_s имеет три составляющие: первая из которых F_o , обусловленная трением колес автомобиля с покрытием дороги, пропорциональная весу автомобиля F_G ; вторая F_1 , обусловленная трением боковой поверхности автомобиля с воздухом, пропорциональная скорости движения автомобиля; а третья F_2 , обусловленная давлением набегающего на

поперечное сечение автомобиля потока воздуха, пропорциональная квадрату скорости автомобиля, то есть

$$F_s = F_o + F_1 + F_2 = k_0 F_G + k_1 V + k_2 V^2, \quad (2)$$

где значение коэффициента k_0 является табличным и зависит от материала поверхности дороги, значение коэффициента k_1 зависит от площади боковой поверхности автомобиля, а значение коэффициента k_2 зависит от площади поперечного сечения автомобиля.

Подставляя выражение для F_s с (2) в (1), получим уравнение динамики автомобиля в виде

$$m \frac{dV}{dt} = F_T - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (3)$$

которое в общем виде справедливо и для автомобиля, силу тяги F_T которого создает двигатель внутреннего сгорания, и для автомобиля, у которого эту силу создает электродвигатель. Но если вспомнить, что

$$F_T = \frac{M_T}{R}, \quad (4)$$

где M_T – тяговый момент двигателя, а R – радиус колеса, а также принять во внимание то, что для двигателя внутреннего сгорания

$$M_T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{V}{2\pi R}} = \frac{2\pi R P}{V}, \quad (5)$$

где P – это мощность двигателя, а ω угловая скорость вращения колеса, а также принять во внимание еще и то, что для тягового электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением

$$M_T = k_D I \Phi(I), \quad (6)$$

где k_D – коэффициент, определяемый по паспортным данным электродвигателя, I – ток якоря этого электродвигателя, а $\Phi(I)$ – магнитный поток его индуктора, который согласно кривой намагничивания является функцией тока якоря, то с учетом соотношений (4) – (6) уравнение динамики автомобиля (3) будет иметь вид

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi P}{V} - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2 = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (7)$$

если тяговую силу создает двигатель внутреннего сгорания за счет сгорания Q единиц топлива за единицу времени, где k_p – коэффициент пропорциональности между потоком топлива Q и создаваемой этим потоком мощности P , и будет иметь вид

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (8)$$

если тяговую силу создает электродвигатель постоянного тока с последовательным возбуждением. Сравнивая правые части уравнений (7), (8), видим, что они существенно отличаются.

Обобщая вышеизложенное, можно утверждать: если автомобиль будет создавать тяговую силу лишь с помощью двигателя внутреннего сгорания, то его динамику будет описывать уравнение (7); если тяговая сила будет создаваться только с помощью электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением, то динамику автомобиля будет описывать уравнение (8); а если тяговая сила будет создаваться параллельно работающими

на один вал и двигателем внутреннего сгорания, и электродвигателем постоянного тока с последовательным возбуждением, то динамику автомобиля будет описывать уравнение

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (9)$$

которое получаем суперпозицией уравнений (7) и (8).

Но следует отметить, что в представленном виде уравнения (7) – (9) описывают динамику автомобиля только во время его движения по дороге, полотно которой проложено на горизонтальной плоскости.

Если же автомобиль будет двигаться на спуск, как показано на рис. 1а, или на подъем, как показано на рис. 1б, то в уравнение (7) – (9) вместо члена $(-k_0 F_G)$ следует ввести двучлен $(-k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta)$ для спуска или двучлен $(-k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta)$ для подъема, то есть эти уравнения станут такими:

– для спуска

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (10)$$

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G \cos \alpha + F_G \sin \alpha - k_1 V - k_2 V^2, \quad (11)$$

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2; \quad (12)$$

– для подъема

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (13)$$

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (14)$$

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2. \quad (15)$$

Теперь определимся с критериями, минимизацией значений которых мы будем решать задачу оптимизации.

Очевидно, что для задачи оптимизации движения автомобиля с помощью двигателя внутреннего сгорания этот критерий будет иметь вид функционала

$$E_Q = \int_0^{T_Q} k_p Q dt, \quad (16)$$

характеризующего количество механической энергии E_Q , затраченной за время езды T_Q автомобиля с использованием двигателя внутреннего сгорания.

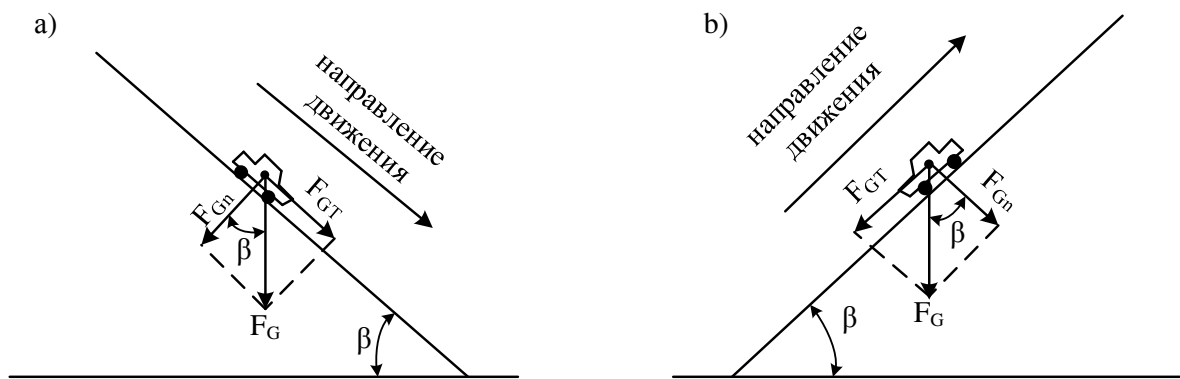


Рис. 1. Векторные диаграммы сил, создаваемых силой тяжести F_G автомобиля при движении на спуск (а) и на подъем (б)

Для задачи оптимизации движения автомобиля с помощью электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением критерий оптимизации будет иметь вид функционала

$$E_I = \int_0^{T_I} U I dt, \quad (17)$$

характеризующего количество электроэнергии E_I , израсходованной за время T_I езды автомобиля с использованием электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением, в якоре которого течет ток I , создаваемый напряжением U на его зажимах. Из схемы, приведенной на рис. 2, где U_B – напряжение аккумуляторной батареи B , имеющее внутреннее сопротивление r_B , видно, что критерий (17) легко привести к виду

$$E_I = \int_0^{T_I} U I dt = \int_0^{T_I} (U_B - \Delta U) I dt = \int_0^{T_I} U_B \left(1 - \frac{r_B}{U_B} I\right) I dt. \quad (18)$$

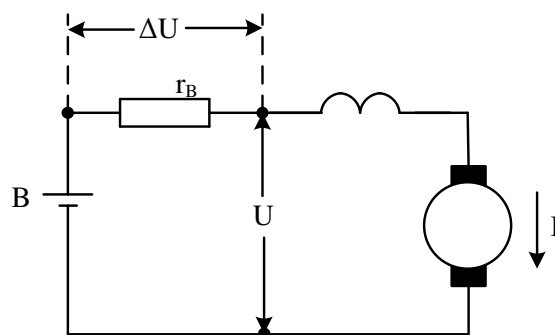


Рис. 2. Схема подключения электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением к аккумуляторной батарее B , что имеет внутреннее сопротивление r_B

А для задачи оптимизации движения автомобиля с помощью параллельно работающих на один вал двигателя внутреннего сгорания и электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением критерий оптимизации будет иметь вид функционала

$$E_{QI} = \gamma \int_0^{T_{QI}} U_B \left(1 - \frac{r_B}{U_B} I\right) I dt + \int_0^{T_{QI}} k_P Q dt, \quad (19)$$

в котором T_{QI} – время езды автомобиля с одновременным использованием обоих двигателей, а γ – это коэффициент приведения электрической энергии к эквивалентному количеству механической.

Как правило, когда мы едем на автомобиле, то нас интересует не только количество топлива или электроэнергии, которые мы используем, двигаясь в течение времени T_Q , T_I или T_{QI} , но нас интересует также, какое расстояние L_Q , L_I или L_{QI} мы проедем за это время. Очевидно, что, зная скорость движения автомобиля V , мы можем эти расстояния определить с помощью функционалов:

$$L_Q = \int_0^{T_Q} V dt, \quad (20)$$

$$L_I = \int_0^{T_I} V dt, \quad (21)$$

$$L_{QI} = \int_0^{T_{QI}} V dt. \quad (22)$$

А учет функционалов (20) – (22) переводит поставленную нами задачу оптимизации в класс изопериметрических [3, 4], поскольку нам придется искать такой закон изменения скорости автомобиля, который минимизирует один из функционалов – (16), (18) или (19) – при условии, что динамику автомобиля описывает соответствующее уравнение из множества (7) – (9) или (10) – (15), а расстояние, пройденное автомобилем, задает функционал из множества (20) – (22).

Для того чтобы полученные результаты могли быть представленными в наиболее обобщенном виде, целесообразно перейти к относительным величинам, используя в качестве основных базовых величин: для тяговой силы F_T ее значение F_H в номинальном режиме; для момента M на валу его номинальное значение M_H ; для скорости V движения автомобиля ее номинальное значение V_H ; для тока I якоря тягового электродвигателя его номинальное значение I_H ; для магнитного потока $\Phi(I)$ тягового электродвигателя его значение при номинальном токе $\Phi_H = \Phi_H(I_H)$; для напряжения U , которое прикладывают к зажимам тягового электродвигателя, напряжение U_B аккумуляторной батареи при ее полном заряде; для расхода топлива Q его значение в номинальном режиме Q_H , то есть в режиме, когда двигатель внутреннего сгорания создает мощность P , равную ее значению P_H в номинальном режиме работы. А в качестве производных базовых величин используем: для времени t – электромеханическую постоянную T_M , связанную с основными базовыми величинами соотношением

$$T_M = \frac{mV_H}{F_H}, \quad (23)$$

для расстояния L – величину L_H , связанную с основными базовыми величинами соотношением

$$L_H = V_H T_M, \quad (24)$$

для энергии E постоянного тока аккумуляторной батареи – величину E_H^I , связанную с основными базовыми величинами соотношением

$$E_H^I = U_B I_H T_M, \quad (25)$$

для механической энергии E , которая выделяется двигателем внутреннего сгорания, – величину E_H^Q , связанную с основными базовыми величинами соотношением –

$$E_H^Q = k_P Q_H T_M. \quad (26)$$

С учетом основных базовых и производных базовых величин в качестве эквивалента уравнения (7) в относительных величинах получим уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0 - f_1 v - f_2 v^2, \quad (27)$$

где:

$$v = \frac{V}{V_H}, \quad q = \frac{Q}{Q_H}, \quad \tau = \frac{t}{T_M}; \quad (28)$$

$$\frac{2\pi k_P Q_H T_M}{m V_H^2} = 1,; \quad (29)$$

$$f_0 = \frac{k_0 F_G T_M}{m V_H}, \quad f_1 = \frac{k_1 T_M}{m}, \quad f_2 = \frac{k_2 V_H T_M}{m}; \quad (30)$$

в качестве эквивалента уравнения (8) в относительных величинах получим уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2, \quad (31)$$

где:

$$i = \frac{I}{I_H}, \quad \phi(i) = \frac{\Phi(I)}{\Phi_H(I_H)}; \quad (32)$$

$$\frac{k_D I_H \Phi_H(I_H) T_M}{R m V_H} = 1, \quad (33)$$

а относительные переменные v, τ и коэффициенты f_0, f_1, f_2 определяют соотношения соответственно (28) и (30);

в качестве эквивалента уравнения (9) в относительных величинах получим уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2; \quad (34)$$

в качестве эквивалентов уравнений (10), (11), (12) в относительных величинах получим соответственно уравнения

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (35)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (36)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (37)$$

где дополнительно к уже определенным переменным и коэффициентам имеем еще один коэффициент

$$f_0^* = \frac{F_G T_M}{m V_H}; \quad (38)$$

в качестве эквивалентов уравнений (13), (14), (15) в относительных величинах получим

соответственно уравнения

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (39)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (40)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2; \quad (41)$$

в качестве эквивалентов критериев (16), (18), (19) в относительных величинах получим соответственно функционалы

$$e_q = \int_0^{\tau_q} q d\tau, \quad (42)$$

$$e_i = \int_0^{\tau_i} (1 - \alpha i) i d\tau, \quad (43)$$

$$e_{qi} = \int_0^{\tau_{qi}} q d\tau + \gamma \int_0^{\tau_{qi}} (1 - \alpha i) i d\tau, \quad (44)$$

где:

$$e_q = \frac{E_Q}{E_H^Q} = \frac{E_Q}{k_q Q_H T_M}, \quad e_i = \frac{E_I}{E_H^I} = \frac{E_I}{U_B I_H T_M}, \quad e_{qi} = \frac{E_{QI}}{E_H^Q} = \frac{E_{QI}}{k_q Q_H T_M}; \quad (45)$$

$$\tau_q = \frac{T_Q}{T_M}, \quad \tau_i = \frac{T_I}{T_M}, \quad \tau_{qi} = \frac{T_{QI}}{T_M}; \quad (46)$$

$$\alpha = \frac{r_B I_H}{U_B}, \quad \gamma = \frac{U_B I_H}{k_P Q_H}; \quad (47)$$

в качестве эквивалентов ограничений (20), (21), (22) в относительных величинах получим соответственно функционалы

$$l_q = \int_0^{\tau_q} v d\tau, \quad (48)$$

$$l_i = \int_0^{\tau_i} v d\tau, \quad (49)$$

$$l_{qi} = \int_0^{\tau_{qi}} v d\tau, \quad (50)$$

где:

$$l_q = \frac{L_Q}{V_H T_M}, \quad l_i = \frac{L_I}{V_H T_M}, \quad l_{qi} = \frac{L_{QI}}{V_H T_M}. \quad (51)$$

Теперь мы имеем все соотношения, необходимые для решения задачи оптимизации движения автомобиля как в случае создания тяговой силы только двигателем внутреннего сгорания или только электродвигателем постоянного тока с последовательным возбуждением, так и в случае ее создания обоими двигателями одновременно. Следовательно, можем перейти к декомпозиции этой задачи, для которой логичной является

такая схема.

1. В случае выхода из строя электрического привода или полном разряда аккумуляторной батареи ту часть маршрута, что осталась, придется преодолевать только с помощью двигателя внутреннего сгорания, для которого необходимо синтезировать законы оптимального движения как горизонтальными участками дороги, так и на спусках и подъемах.

2. В случае выхода из строя двигателя внутреннего сгорания или окончания запаса горючего в баке ту часть маршрута, что осталась, придется преодолевать только с помощью электропривода, для которого необходимо синтезировать законы оптимального движения как горизонтальными участками дороги, так и на спусках и подъемах.

3. При обоих исправных двигателях, достаточном запасе топлива и использовании дорогих аккумуляторов, стоимость приобретения которых и расходы на эксплуатацию включают в соответствующую пропорцию, определенную сроком эксплуатации, в стоимость потребленной электроэнергии, весь маршрут целесообразно преодолевать с помощью одновременно работающих на общий вал обоих двигателей, что приводит к необходимости синтеза законов оптимального движения для этого случая как горизонтальными участками, так и на спусках и подъемах.

4. При обоих исправных двигателях и использовании дешевых аккумуляторов, что делает более экономичным режим преодоления маршрута с помощью электропривода, целесообразно преодолевать горизонтальные участки и спуски только с помощью электропривода, а на подъемах к валу подключать, кроме электропривода, также и двигатель внутреннего сгорания, что приводит к необходимости синтеза законов оптимального движения с учетом этой особенности. Это режим экономного расходования топлива, которого следует придерживаться в местности, где нет возможности осуществить подзарядку аккумулятора, вследствие чего завершать поездку необходимо будет благодаря лишь использованию двигателя внутреннего сгорания. Этот режим является также целесообразным при дефиците времени, необходимого для подзарядки аккумулятора, в случаях, когда на маршруте возможность осуществить подзарядку есть.

Процедуры синтеза законов оптимального движения гибридного автомобиля для всех приведенных выше случаев будут рассмотрены в следующих наших публикациях.

Выводы

1. Сформулирована задача синтеза законов оптимального движения гибридного автомобиля как по горизонтальному участку дороги, так и на спусках и подъемах; приведены к относительным величинам уравнения динамики автомобиля, критериальные функционалы и изопериметрические ограничения.

2. Осуществлена декомпозиция поставленной задачи для охвата всех возможных случаев организации движения гибридного автомобиля по оптимальным законам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павловський А. М. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Мхитарян А. М. Аэродинамика / А. М. Мхитарян. – Москва : Машиностроение, 1970. – 289 с.
3. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров. – Москва-Ленинград : Энергия, 1965. – 220 с.
4. Мокін Б. І. Теорія автоматичного керування, методологія та практика оптимізації / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 210 с.

Мокін Александр Борисович – д. т. н., проф., заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов (ВЭТЭС), e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Борис Иванович – акад. НАПН Украины, д. т. н., проф., профессор кафедры ВЭТЭС, e-mail: borys.mokin@gmail.com.

Лобатюк Виталий Анатолієвич – аспирант кафедры ВЭТЭС, e-mail: vitalik.htc@gmail.com.

Кубрак Ольга Петровна – студент факультета электроэнергетики и электромеханики. Винницкий национальный технический университет.