УДК 62.50:658.21

И. С. Колесник, к. т. н.; Р. Л. Иванов; П. В. Северилов

КОМПЛЕКС РАБОЧИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ КРЕДИТНЫХ СТРАТЕГИЙ

Поставлена и решена задача моделирования оптимальных процессов развития производственных систем с учетом использования кредитов. Получены оптимальные стратегии кредитования и возвращения кредитов. Получены функции спроса для случая оптимального управления развитием.

Ключевые слова: *распределенная система, оптимальное развитие, производитель, спрос, кредиты, оптимальная кредитная стратегия развития, рабочая модель.*

Постановка проблемы

Эффективность процессов кредитования – условие выживания и успешного развития, как для заемщиков, так и кредиторов – банков. Рассматриваем только кредиты на развитие производства *с позиций заемщика-производителя*. В таком случае задача определения темпа кредитования и распределения кредитов между направлениями развития предприятия или между продуктами, которые выпускает и планирует выпускать предприятие, является задачей оптимального управления нелинейной динамической системой за счет собственных и внешних ресурсов. Финансово-юридические аспекты являются лишь транзакционными расходами на реализацию процесса кредитования. Оптимизация процесса кредитования сегодня – условие выживания не только отдельного производителя или банка, но и отраслевой или национальной экономики в целом.

Нерешенные части проблемы. В доступной литературе отсутствуют математические модели для определения оптимальных стратегий кредитования, возвращения кредитов и расчета рисков. Первая причина "вакуума" публикаций – конфиденциальность корпоративной науки, вторая – "ничья территория" и отсутствие специалистов по системному анализу, управлению и программированию. В доступной литературе по управлению проектами есть только словесные рецепты и неадекватные модели. Причины в том, что мы имеем дело со сложной вариационной задачей, для решения которой необходим комплексный подход: "программирование + теория оптимального управления + экономика". Побочная проблема – несовместимость стандартов публикаций со стандартами математических пакетов и пакетов для моделирования. Сегодня публикация, где формулы набраны в текстовом редакторе, обычно не содержит новых результатов.

Цели разработки – создание методов и программных средств по оптимизации и моделированию достаточно широкого класса задач оптимального управления развитием производственных систем.

Компоненты модели развития с использованием внешних ресурсов

1. Метод оптимального агрегирования. Вспомним постановки задач нелинейного программирования.

Прямая задача – максимизация суммарного производства при ограничении ресурсов. Рассматривается система из N элементов, которые используют некоторый ресурс в количестве x_i и проводят продукцию в количествах: $y_i = fi(x_i)$; $i = 1, \ldots, N$, где x_i – количество ресурса, выделенного i-му элементу. Нужно распределить ресурс R так, чтобы максимизировать суммарное производство:

$$F(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} fi(x_i) \text{ ; при ограничении } Fs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} fi(x_i) - Ys = 0 .$$

Сопряженная задача – минимизация суммарных расходов при ограничении уровня суммарного производства. Рассматривается та же система из N производственных элементов. Необходимо распределить нагрузку Ys так, чтобы минимизировать суммарные расходы:

$$Gs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i \text{ ; при условии } Fs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} fi(x_i) - Ys = 0 .$$

Управление – x_i или $y_i = fi(x_i)$.

Методы решения. Суть известных методов нелинейного программирования – нахождение экстремума функции N переменных при ограничениях, или "задача выбора точки в N – мерном фазовом пространстве" по терминологии Беллмана [1]. Метод оптимального агрегирования заменяет задачу нахождения экстремума функции многих переменных последовательностью задач нахождения экстремума функции одной переменной [3 – 4].

Первый шаг в методе оптимального агрегирования – расширение задачи.

Вводим вектор-функцию оптимального распределения ресурса $Dop(R)$, $0 \le R \le R\max$, где $R\max$ – максимальное значение ограничения. Компоненты этой вектор-функции задают оптимальное по критерию суммарного производства распределение ресурса.

Введем оптимальную производственную функцию системы $Yop(R) = \sum_{i=1}^{N} fi(Dop(R)_i)$.

Функция $Yop(R)$ для каждого значения ограничения по ресурсу R задает максимальную эффективность превращения ресурса в продукт.

Формулируем расширенную оптимизационную задачу: задано N производственных функций, аддитивное ограничение по ресурсу и аддитивный критерий – суммарное производство; нужно найти оптимальную производственную функцию системы $Yop(R)$ и вектор-функцию оптимального распределения ресурса $Dop(R)$.

Второй шаг – переход к безразмерным переменным управления. Вместо переменных управления $x_1, x_2, \ldots, x_N$ вводим безразмерные переменные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$; где $\alpha_1 = x_1 \div R$; $\alpha_2 = x_2 \div R$. Содержательно эти переменные – доли ресурса для развития соответствующих элементов, сумма этих долей равна единице. Такая формальная замена позволяет доказать, что оптимальная производственная функция (ФП) будет такой, которая огибает множество определенных производственных функций элементов системы. Именно на этом строится обоснование метода оптимального агрегирования. Введем множество α-функций:

$$f\alpha(f1, f2, \alpha, x) := f1(\alpha \cdot x) + f2[(1-\alpha) \cdot x].$$

Оптимальная ФП системы из двух элементов будет такой, которая огибает множество $f\alpha(f1, f2, \alpha, x)$, $0 \le \alpha \le 1$, то есть результатом применения операции $\max(\cdot)$, которая является *ассоциативной* и *коммутативной*. Для системы с аддитивным критерием оптимальная ФП $FopN(f1, f2, \ldots, fN)$ имеет место свойство:

$$Fop3(f1, f2, f3) := Fop2(f1, Fop2(f2, f3)).$$

Программные средства позволяют реализовать *бинарный оператор оптимального агрегирования* $f2o(f1, f2)$, который берет пару функций *f1, f2* и возвращает оптимальную производственную функцию и соответствующую вектор-функцию оптимального распределения ресурса. Объём вычислений по этому методу *растет только линейно, а не* *экспоненциально. Метод не имеет ограничений по форме ФП*, потому что максимум функции одной переменной находится методом прямого перебора. Метод, в сущности, заменяет задачу поиска экстремума алгебраической задачей. *Оператор оптимального агрегирования порождает алгебру* с одной ассоциативной и коммутативной операцией, элементы которой – массивы переменной размерности.

2. Метод решения вариационной задачи оптимального развития. Р. Беллман исследовал структуру решений для вариационных задач распределения и нашел решение для частного случая – задачи Марковица. Суть задачи развития – оптимальное распределение текущих ресурсов между накоплением и развитием – созданием "производственных мощностей". Эта базовая задача была модифицирована по таким компонентам:

– использование метода принципа максимума, а не метода динамического программирования;

– нахождение максимума функции Гамильтона методом прямого перебора;

– использование метода оптимального агрегирования для замены многомерного объекта эквивалентным оптимальным одномерным объектом.

Кратко рассмотрим решение одномерной задачи развития методом принципа максимума.

Объект управления: $\frac{d}{dt}x(t)=fin(y(t))$, где *x(t)* – темп выпуска, *y(t)* – темп инвестиций, $y(t)=x(t)\cdot u(t), 0\le u(t)\le 1$ – нормированное управление, *fin(y(t))* – функция отдачи инвестиций – нестрого монотонно возрастающая функция.

Граничные условия $x(0)=x0$ – стартовый темп производства, *Tp* – плановый период.

Критерий $J1=\int_0^T x(t)\cdot(1-u(t))dt$ – "накопленный доход", *цель оптимизации* $\min_{ut}(J)$ – управление, которое дает максимум критерия, – накопленного за плановый период дохода.

Точное решение задачи. Записываем задачу в каноническом виде – добавляем диффуравнение для критерия: $\frac{d}{dt}x(t)=fin(x(t)\cdot u(t))$; $\frac{d}{dt}J1(t)=x(t)\cdot(1-u(t))$.

Вводим обозначения: $\frac{d}{dt}x(t)=fin(x(t)\cdot u(t))=fx$; $\frac{d}{dt}J1(t)=x(t)\cdot(1-u(t))=fJ$.

Запишем функцию Гамильтона $H(x,u)=\sum_{i=0}^{N}\psi_i f_i=\psi J\cdot fJ+\psi x\cdot fx$.

Подставим правые части дифуравнений и получим

$$H(x,u)=\psi J\cdot[x(t)\cdot(1-u(t))]+\psi x\cdot fin(x(t)\cdot u(t)).$$

Записываем уравнения для определения сопряжённых функций.

$$\frac{d}{dt}\psi J(t)=-\frac{\partial}{\partial J}H(x,u)\ ;\ \frac{d}{dt}\psi x(t)=-\frac{\partial}{\partial x}H(x,u)\ .$$

Находим соответствующие частные производные от $H(x\ ,u)$

$$\frac{\partial}{\partial J}H(x,u)=0\ ;\ \frac{\partial}{\partial x}H(x,u)=\psi J\cdot(1-u)+\psi x(t)\cdot u\cdot\frac{\partial}{\partial x}fin(u\cdot x).$$

На базе численного решения этих уравнений находится функция Гамильтона.

3. Расширение задачи оптимального развития – кредитные стратегии. По неизвестным причинам Беллман не рассматривал вариационную задачу распределения с учетом использования внешних ресурсов – кредитов. Использование внешних ресурсов в процессах развития является нормой, поэтому введем еще одну переменную управления – темп кредитов. Теперь мы должны определять, кроме *оптимальной стратегии развития* (пропорции распределения ресурсов между накоплением и развитием), еще и *оптимальную* *кредитную стратегию* – объем кредитов на каждом шаге процесса. Не вводим пока еще одну переменную – темп возвращения кредитов. Рассмотрим обычный для банковской сферы способ возвращения кредитов: равными долями с момента, когда кредит взят, и до конца периода с учетом процентов. Имеем две переменных управления: темп кредита *xkr(t)* и доля текущих ресурсов *u1(t)*, направленных в инвестиции. Нужно найти две функции времени *u1op(t), xkrop(t)*, которые дают максимум накопленного дохода за плановый период T_p.

Анализ свойств функции Гамильтона позволяет найти удовлетворительные приближения этой функции *в пространстве стратегий*, ведь нас интересуют только положения максимумов этой функции. Вспомним "физический смысл" функции Гамильтона – это "проекция" текущих управлений на конечный результат. Сравним три выражения для функции Гамильтона: точное и приближенное, без кредитов и с кредитами. Введем для сокращения выражений переменную "суммарные текущие ресурсы" $xs(t) = x(t) + xkr(t)$ и запишем рядом для сравнения выражения для функции Гамильтона приближенное с учетом кредитов и точное.

$$H(x,u) = x \cdot (1-u) + fin(x \cdot u) \cdot (T-t) \;;$$
$$H(xs,u) = xs \cdot (1-u) + fin(xs \cdot u) \cdot (T-t) - xkr \cdot [1 + prc \cdot (T-t)] \;;$$
$$Ho(x,u) = x \cdot (1-u) + fin(x \cdot u) \cdot \psi n\left(x, u, \frac{\partial}{\partial y} fin(y)\right) \;;$$

где *T* – время окончания процесса, *t* – текущее время, *(T - t)* – время до конца процесса, *x(t)* – темп производства, *xkr(t)* – темп кредитов, $\psi n\left(x, u, \frac{\partial}{\partial y} fin(y)\right)$ – функция пользователя, определенная через численное решение уравнения для сопряжённой функции.

Анализ оптимальных процессов развития. Получение функции влияния ставки кредитов. Точно так же, как и в физике, мощный ускоритель элементарных частиц позволяет находить новые результаты, так и адекватная реальности и вычислительно эффективная программа моделирования процессов развития становится генератором новых результатов. Рассмотрим пример исследования зависимости кредитных стратегий производителя от ставки кредитов и эффективности инвестиций. Для получения функций влияния выполнялось 20 –100 прогонов программы моделирования. На рис. 1 представлен двухуровневый интерфейс для анализа функций влияния. Особенность интерфейса в том, что пользователь может выбрать точку на функции влияния и увидеть "в деталях" процесс развития производственной системы, который отображается в эту точку. Функция влияния ставки кредитов является "естественной" функцией спроса на кредиты, обусловленной оптимальной кредитной стратегией. Эта стратегия вычисляется на базе математической модели и действительных механизмов экономики. Такая модель становится *генератором новых знаний* о свойствах систем данного класса. На рис. 2 представлен пример такой ситуации: в оптимальном процессе развития при уменьшении ставки кредитов, начиная с некоторого значения ставки кредитов (в данном случае – 20%), накопленный доход производства растет, а накопленный доход банка – падает. Однако *суммарный доход системы растет*, поскольку интересы сторон неантагонистичны: имеем игру с ненулевой суммой. Модель оптимального развития позволяет рассчитать размер компенсации банку потерь от снижения ставки кредитов, при котором выигрывают обе стороны. Таким образом (рис. 2) модель подсказывает путь к одновременному повышению выигрыша производителя и банка за счет использования иного механизма взаимодействия: *доходы банка пропорциональны не только размеру кредитов, но и размеру доходов производства*. Отдаленным аналогом предложенного механизма является механизм акционирования предприятия: доход по акциям зависит не только от количества акций, но и от прибыли предприятия.

Оптимизация стратегий возвращения кредитов. Приведенные на рис. 1, 2 примеры результатов справедливы для стандартной схемы возвращения кредитов (возвращение тела кредитов и процентов равными частями до конца планового периода). Предпримем следующий шаг от стандартной схемы возвращения кредитов равными частями. Была поставлена и решена *расширенная задача оптимального развития*: к переменным управления "доля суммарного ресурса на развитие", "темп кредитов" добавлена переменная "темп возвращения кредитов".

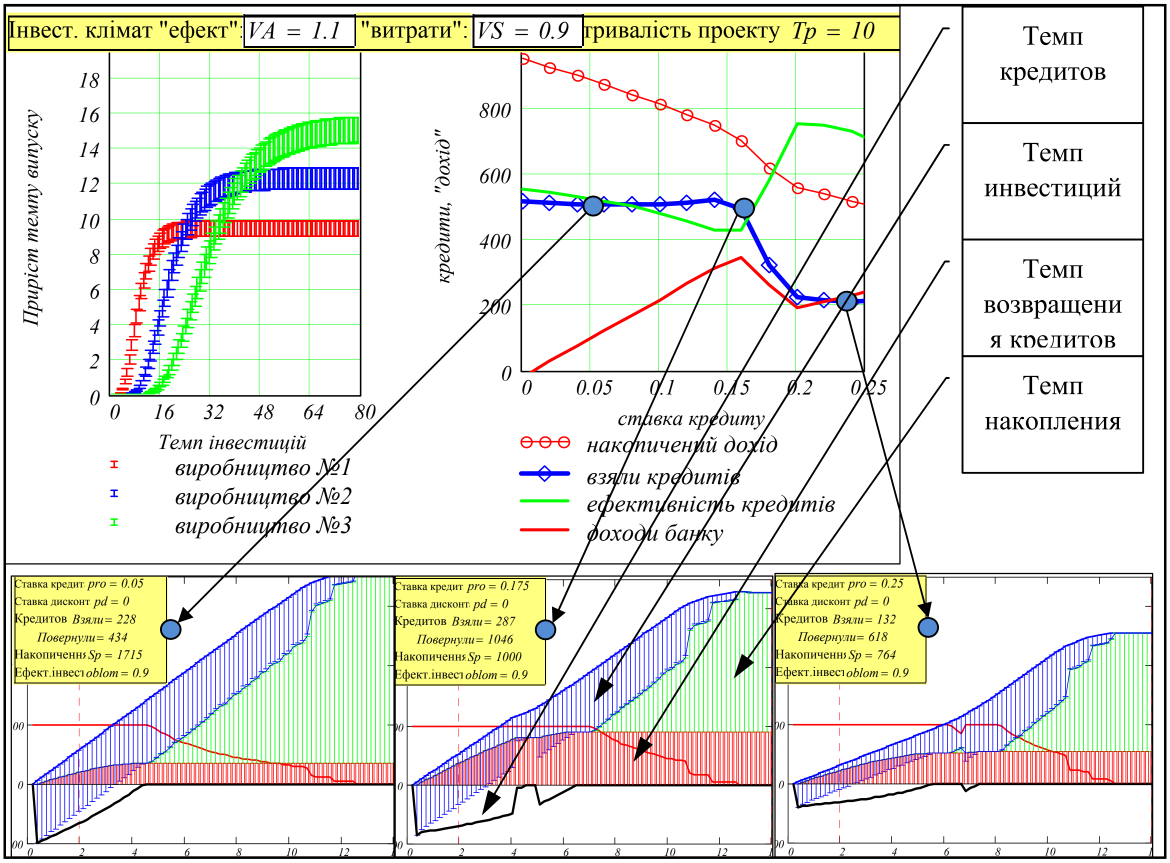

Рис. 1. Анализ функции влияния ставки кредитов на показатели проекта

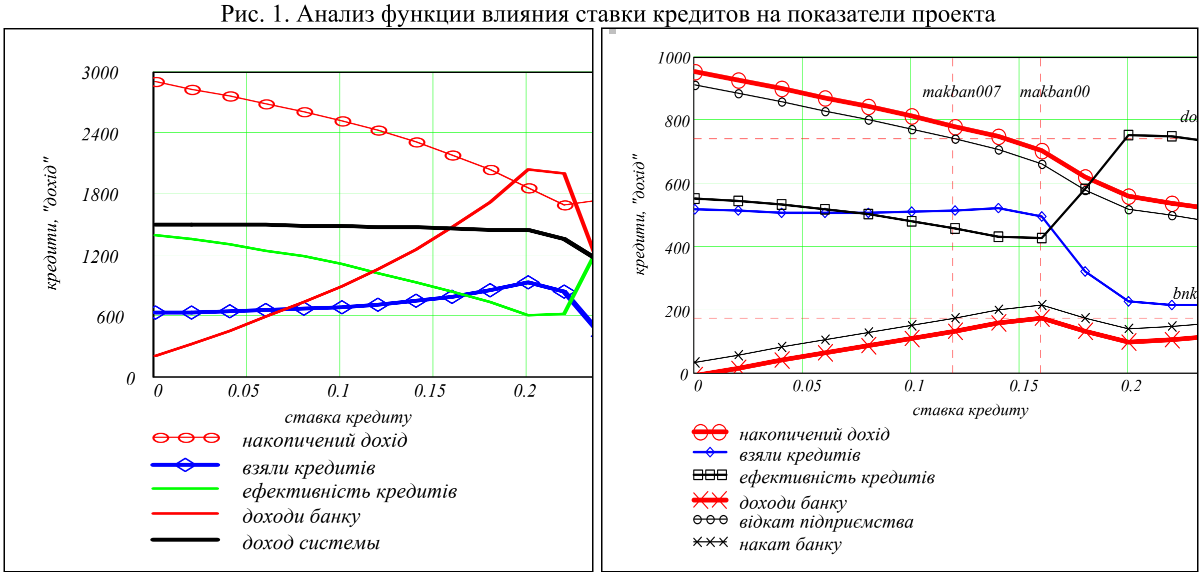

Рис. 2. Анализ распределения дохода в системе "производитель – банк"

На рис. 3 представлены результаты моделирования процессов оптимального развития с двумя стратегиями возвращения кредитов: равными долями и оптимальной стратегией возвращения кредитов. Форма интерфейса удобна для аналитика и специалиста по управлению.

На рис. 4 представлена альтернативная форма интерфейса – балансная, удобная и "естественная" для финансиста. Эти решения могут быть заменены приближенными, удобными для практической реализации. Словесная формула оптимального управления развитием: – сначала все ресурсы (собственные и одолженные) направляем в инвестиции, оптимальный объем инвестиций приблизительно постоянен, если в производственной системе отсутствуют эффекты освоения производства; – кредитов берется столько, чтобы дополнить собственные ресурсы к оптимальному уровню инвестиций, кредитование прекращается когда собственных ресурсов достаточно для развития; – после прекращения кредитования все, что остается от инвестиций, идет на возвращение кредитов; – только после возвращения долгов начинается процесс накопления.

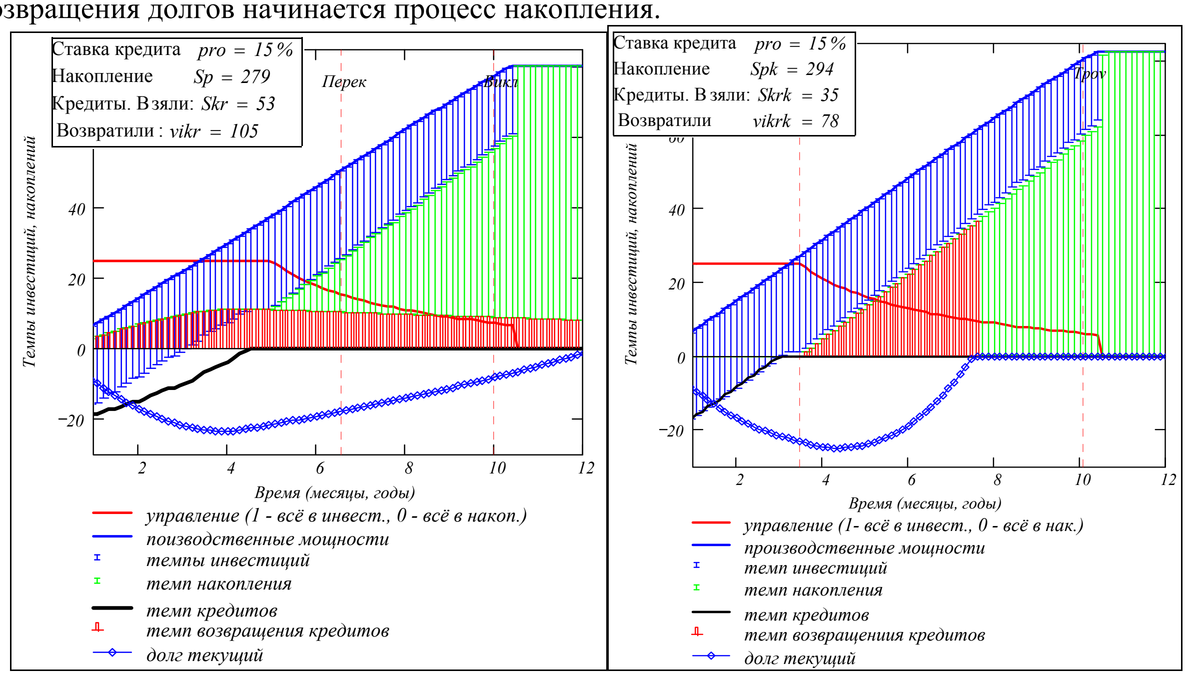

Рис. 3. Сравнение двух стратегий возвращения кредитов

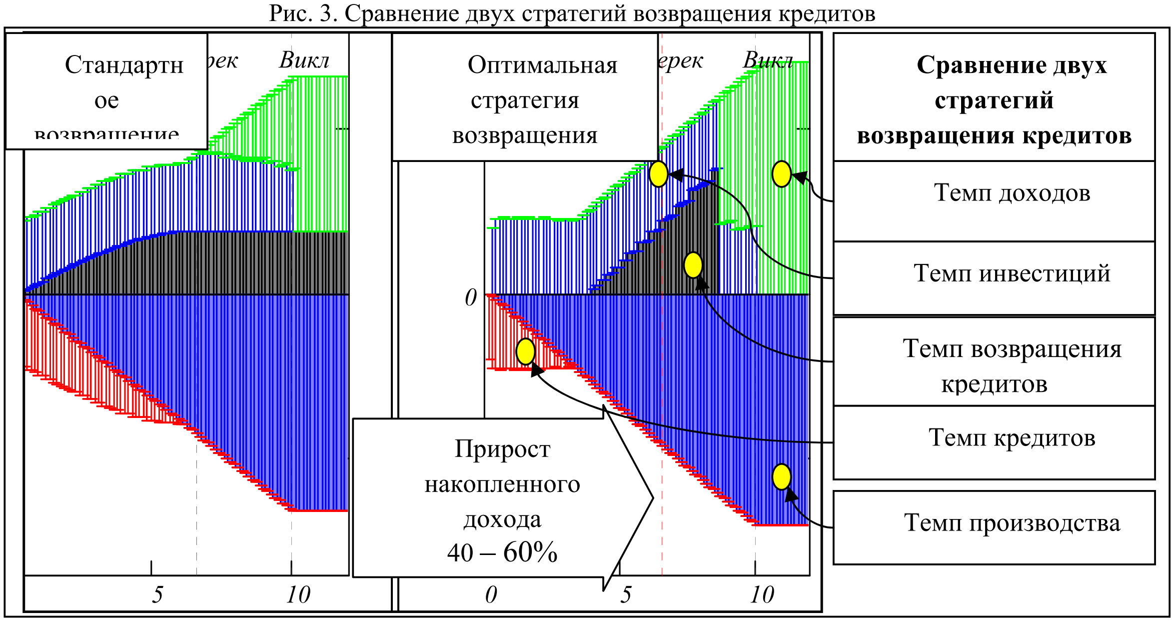

Рис. 4. Анализ стратегий возвращения кредитов. Балансная форма

Результаты разработки. Найдено точное и приближенное *решение вариационной задачи развития* с учетом использования внешних ресурсов, разработана *модель процесса развития системы "N производителей на рынке M продуктов"*, разработаны *модули построения функций влияния и частотных распределений рисков*. Примеры результатов моделирования, приведенные на рис. 1 – 4, являются индикатором того, что задекларированные модели действительно разработаны, а программные модули действительно работают. В статье рассмотрены преимущественно конечные результаты достаточно объемного процесса конструирования системы математических моделей оптимального развития. Полное теоретическое обоснование подхода к решению вариационной задачи выполнено в среде математического пакета с использованием аппарата символьных вычислений и имеет объем 35 страниц. Данная разработка является модулем системы моделей класса "*N* производителей, *M* продуктов, *K* потребителей".

Выводы. В основе полученных результатов – эффективное решение вариационной задачи развития с использованием метода оптимального агрегирования и метода решения вариационной задачи развития с учетом использования внешних ресурсов. Разработана система рабочих программ и интерфейсов – "виртуальная реальность". Получены *новые результаты* (свойства оптимальных процессов развития), интересные для теории и полезные для практики: – разрывность оптимальных стратегий развития; – разрывность кредитных стратегий; – уменьшение спроса на кредиты при низких ставках кредитов; – найдены условия непротиворечивости интересов банка и производителя; – предложено решение по согласованию интересов сторон за счет справедливого распределения доходов.

Методологические результаты работы: – показано, что кредиты не только повышают накопленный доход проекта за плановый период, но и упрощают управление процессом развития, а сам процесс делают менее рисковым; – приведен пример рациональной технологии конструирования новых моделей для новых задач, ориентированной на технологии и возможности Интернета, в частности на "программное обеспечение как сервис".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М.: Издат. иностр. литер., 1962. – 233 с.

2. Мак-Дональд М. Стратегическое планирование маркетинга. – Москва – Харьков: Питер, 2001. – 267 с.

3. Боровская Т.Н. Детская экономика. Моделирование и оптимизация производственных систем / Т.Н. Боровская, В.А. Северилов, И.С. Колесник. // Компьютеры + Программы. – 2002. – № 2. – С. 43 – 47.

4. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с.

5. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 182 с.

Колесник Ирина Сергеевна – старший преподаватель кафедры вычислительных систем;

Иванов Роман Леонидович – студент группы 5АС – 04;

Северилов Павел Викторович – соискатель кафедры компьютерных систем управления.

Винницкий национальный технический университет.